Nierówność Ptolemeusza

*Jacek GANCARZEWICZ**,
*Magdalena STASZEK***

W klasycznym najczęstszym sformułowaniu **twierdzenie Ptolemeusza** to:

Jeżeli na czworokącie można opisać okrąg, to iloczyn jego przekątnych równa się sumie iloczynów jego przeciwległych boków.

Autorstwo tego twierdzenia jest przypisywane greckiemu matematykowi Ptolemeuszowi pochodzącemu z Tebaidy, który kształcił się i działał w Aleksandrii na początku naszej ery (100–175).

Udowodnimy twierdzenie ogólniejsze zwane **nierównością Ptolemeusza**:

Niech a, b, c, d będą kolejnymi bokami dowolnego czworokąta oraz niech e, f będą jego przekątnymi. Wtedy

$$ac + bd \geqslant ef. \tag{$*$}$$

W warunku $(*)$ zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy na czworokącie można opisać okrąg.

W dowodzie drugiej części powyższego twierdzenia będziemy korzystali z następującego prostego faktu, często znanego ze szkoły:

Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy jego przeciwległych kątów wynoszą po 180°.

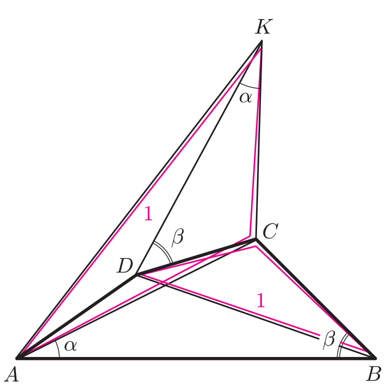
Oczywiście, wystarczy, że suma jednej pary przeciwległych kątów czworokąta wynosi 180°, bo suma wszystkich kątów czworokąta wynosi 360°.

Jego dowód, jak wiadomo, opiera się na dobrze znanym twierdzeniu o kącie środkowym i kątach wpisanych opartych na tym samym łuku.

Dowód nierówności Ptolemeusza. Niech $ABCD$ będzie dowolnym czworokątem. Mamy pokazać, że

$$AC \cdot BD \leqslant AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Oznaczmy przez α kąt CAB, a przez β kąt CBA. Narysujmy półprostą wychodzącą z punktu D, leżącą na zewnątrz czworokąta $ABCD$ i tworzącą z bokiem CD kąt β. Na tej półprostej wyznaczmy taki punkt K, aby kąt DKC był równy α. Dzięki temu trójkąty KDC i ABC są podobne. Zachodzą zatem proporcje



$$\frac{KC}{AC} = \frac{DC}{BC} = \frac{DK}{AB}, \tag{1}$$

skąd w szczególności wynika, że

$$DK = \frac{DC \cdot AB}{BC}. \tag{2}$$

Oznaczmy przez γ kąt DCA. Teraz $\sphericalangle ACK = \sphericalangle DCK + \gamma$. Z trójkąta KDC mamy $\sphericalangle DCK = 180^\circ - \alpha - \beta$, czyli ostatecznie $\sphericalangle ACK = 180^\circ - \alpha - \beta + \gamma$. Analogicznie, $\sphericalangle DCB = \sphericalangle ACB + \gamma$, a z trójkąta ABC otrzymujemy $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \alpha - \beta$, czyli $\sphericalangle DCB = 180^\circ - \alpha - \beta + \gamma$. Zatem mamy $\sphericalangle ACK = \sphericalangle DCB$. Ponieważ zachodzi proporcja

$$\frac{CB}{AC} = \frac{DC}{KC}$$

wynikająca z (1), zatem trójkąty KAC i CDB również są podobne (na rysunku zostały oznaczone kolorem, jedną parę odpowiednich boków oznaczyliśmy jedynką). Wynika stąd proporcja

$$\frac{AK}{DB} = \frac{AC}{CB},$$

z której otrzymujemy

$$AK = \frac{AC \cdot DB}{CB}. \tag{3}$$

Z nierówności trójkąta wynika, że

$$AK \leqslant AD + DK, \tag{4}$$

*Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński
**Polish School in Galway, Holy Trinity National School, Irlandia

przy czym w warunku tym zachodzi równość wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, D, K są współliniowe. Podstawiając do tej nierówności otrzymane wcześniej warunki (2) i (3), otrzymujemy nierówność

$$\frac{DB \cdot AC}{CB} \leqslant AD + \frac{DC \cdot AB}{CB}$$

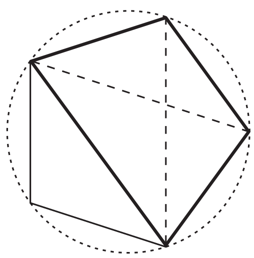
i mnożąc ją obustronnie przez CB, otrzymujemy nierówność Ptolemeusza.

Równość w tym warunku jest równoważna faktowi, że w warunku (4) zachodzi też równość, a to ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy punkt D leży na prostej AK, co jest równoważne równości

$$\sphericalangle KDC + \sphericalangle CDA = 180^\circ.$$

Równość ta oznacza, że suma kątów wewnętrznych czworokąta, leżących przy wierzchołkach B i D, wynosi 180°. W konsekwencji, również suma kątów wewnętrznych czworokąta, leżących przy wierzchołkach A i C, wynosi 180°. Twierdzenie pomocnicze gwarantuje, że na czworokącie $ABCD$ można opisać okrąg.

Przykłady prostych zastosowań

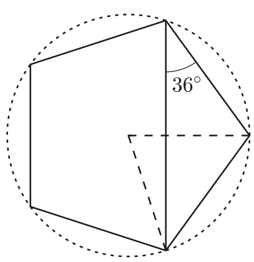


Obliczanie przekątnej pięciokąta foremnego. Rozważmy pięciokąt foremny o boku a i nazwijmy jego przekątną b. Zbudujemy z jego pomocą czworokąt o trzech bokach będących bokami pięciokąta i jednym boku będącym przekątną pięciokąta (na rysunku obok rozważany czworokąt został oznaczony pogrubioną linią).

Zbudowany czworokąt ma dwie przekątne długości b (są to również przekątne pięciokąta foremnego) oraz trzy boki równe a i jeden bok długości b (też przekątna pięciokąta foremnego). Ponieważ czworokąt jest wpisany w okrąg, zatem zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza zachodzi równość $b^2 = ba + a^2$, czyli b jest tym rozwiązaniem równania kwadratowego, które wynosi (drugie rozwiązanie nie interesuje nas, bo jest ujemne)

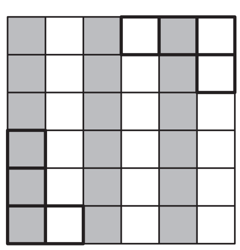
$$b = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

Obliczenie przekątnej pięciokąta foremnego bez użycia twierdzenia Ptolemeusza jest bardziej skomplikowane i mozolne.



Obliczanie wartości funkcji sin **i** cos **dla kąta** 36°**.** Najpierw zauważmy, że w pięciokącie foremnym kąt pomiędzy jego przekątną a sąsiednim bokiem wynosi 36°, bo jest to połowa kąta środkowego, wynoszącego $360^\circ/5 = 72^\circ$, opartego na tym samym łuku. Po uwzględnieniu wzoru na przekątną pięciokąta foremnego otrzymujemy

$$\cos 36^\circ = \frac{b}{2a} = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}), \qquad \sin 36^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 36^\circ} = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$



Rozwiązanie zadania M 1371.

Odpowiedź: Pokrycie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez 4.

Przyjmijmy, że kwadrat $n \times n$ udało się pokryć dostępnymi płytkami. Skoro pole płytki wynosi 4, to n musi być parzyste, powiedzmy $n = 2m$. Rozważmy kolorowanie naszego kwadratu w pasy jak na rysunku. Zauważmy, że każda płytka jest jednego z dwóch rodzajów: zawiera 3 czarne pola lub 1 czarne pole. Niech liczba płytek pierwszego rodzaju wynosi k, a drugiego l. Zliczając czarne i białe pola, otrzymujemy $3k + l = n^2/2 = 2m^2$ oraz $k + 3l = 2m^2$ (dzięki temu, że n jest parzyste, mamy po równo pól czarnych i białych!). Stąd w szczególności $k = l$, więc $4k = 2m^2$, zatem m jest parzyste, a n – podzielne przez 4.

Z drugiej strony, dwie płytki dają pokrycie prostokąta 4×2, zatem łatwo można znaleźć pokrycie kwadratu 4×4, więc także dowolnego kwadratu $n \times n$ dla n będącego wielokrotnością 4.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania różni się od rozwiązania podobnego zadania z poprzedniego numeru jedynie sposobem pokolorowania szachownicy.