Kolejnych twórców analizy matematycznej prezentują znaczki (24)–(27): to Jean le Rond d'Alembert, współtwórca i *spiritus movens* Wielkiej Encyklopedii Francuskiej, Joseph Louis Lagrange, chcący traktować wszystkie funkcje jako szeregi potęgowe, Augustin Louis Cauchy, tutaj ze swym wzorem dotyczącym funkcji zespolonych, i zapoznany czeski matematyk Bernhard Bolzano, przywrócony światu przez Carla Weierstrassa.

A dalej już parada wzorów. Friedrich Carl Gauss prezentowany jest (28) ze swoją probabilistyczną krzywą. Na znaczku (29) mamy tzw. wszystko z najrozmaitszych dyscyplin; George Gabriel Stokes i Pierre Fermat mają swoje wzory również na znaczku (30).

(31) to, co prawda, nie znaczek, lecz stempel, ale Michaił Wasiliewicz Ostrogradski ma na nim okazję przedstawić swój wzór, dzielony często z Gaussem, natomiast Aleksandr Michajłowicz Lapunow ma już swój znaczek (32). Całka krzywoliniowa (33) ma uświetnić stulecie Rumuńskiej Akademii Nauk – wymienieni są Dimitrie Pompeiu, Simion Stoiłow, Gheorghe Titeica, a znaczek (34) wydaje się używać matematyki tylko jako dostarczyciela „ogólnonaukowej" symboliki. Rumun (działał w Niemczech) Herman Julius Oberth (35) reprezentuje kosmonautykę, a James Clerk Maxwell (36) prezentowany jest jako twórca jednego z *dziesięciu wzorów, które zmieniły oblicze świata*.

W spisie eksponatów tej znaczkowej galerii brakuje wielu ważnych nazwisk, ale też nie istnieją opracowania skierowane na tego rodzaju tematykę. Polecam własne poszukiwania, choć łatwe one nie będą.

Jan SWADŹBA

Zakręcona historia

*Odele STRAUB**

Spin (moment pędu) jest jednym z dwóch atrybutów astrofizycznej czarnej dziury – drugim jest jej masa. Tak niespotykana i intrygująca prostota jest rzadkością w astronomii i powodem sukcesu modelu czarnej dziury. Co sprawia, że czarne dziury są wyjątkowe? Aby odpowiedzieć na to pytanie, pozwól się, Drogi Czytelniku, zabrać na pełną zawirowań wyprawę. W przeciwieństwie do dawnych czasów, gdy nieznane obszary oznaczano na mapach sentencją *hic sunt dracones* (tu są smoki) i omijano szerokim łukiem, ta podróż zaprowadzi nas w bezpośrednią, intymną bliskość bestii – do miejsc, w których grawitacja i rotacja zaćmiewają wszystko inne.

Grawitacja i rotacja są wszechobecne we Wszechświecie; od zarania współczesnej nauki ciężar (łac. *gravitas*) oraz zdolność do ruchu (obrotu) były uważane za dwa najbardziej oczywiste atrybuty materii. Ich spotkanie może stworzyć ekstremalne warunki, w których jeden z żywiołów zachowuje się tak, jak gdyby był tym drugim. Takie właśnie – masywne i wirujące – są czarne dziury, idealne ucieleśnienie dwu podstawowych cech natury.

W czasach, gdy publikowano *De revolutionibus orbium coelestium* Mikołaja Kopernika (*O obrotach sfer niebieskich*, 1534 r.), kula była uważana za najdoskonalszy z wszystkich kształtów, a rotacja za najdoskonalszy ze wszystkich ruchów. Co się tyczy grawitacji, spekulował Kopernik, należy ją uważać za naturalne i pierwotne pragnienie każdej materii, dążącej do osiągnięcia doskonałości poprzez zjednoczenie się w kształcie kulistego ciała. Bezruch był jedynym stanem uznawanym za szlachetniejszy niż rotacja. W centrum Wszechświata, w boskim bezruchu rządziło zatem Słońce, raczej duchowo niż fizycznie przewodząc rodzinie planet, które obracały się wokół na przydzielonych im sferach. Smoki oraz inne mitologiczne stwory zostały przeniesione zza siedmiu mórz na firmament i umieszczone tam jako konstelacje na sferze gwiazd stałych, która obejmowała cały Wszechświat Kopernika.

Ów obraz zmienił się nieco, gdy Kartezjusz (René Descartes) opublikował w 1644 r. *Principia Philosophiae* (*Zasady filozofii*), zawierające teorię wirów (a także słynne *Cogito ergo sum*). Według niego Wszechświat przypomina pianę,

*Centrum Astronomiczne im. Mikołaja Kopernika PAN

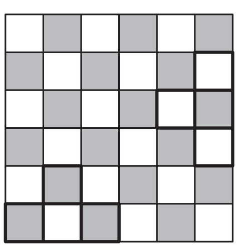
tzn. jest złożony ze ściśle przylegających do siebie „bąbli” zawierających wiry różnych rozmiarów i oddziałujących na siebie wzajemnie. W centrum każdego bąbla znajduje się gwiazda – Układ Słoneczny ze Słońcem w środku jest według Kartezjusza tylko jednym z wielu. W modelu tym przestrzeń nie jest pusta: każdy wir jest wypełniony znikomej grubości sferycznymi warstwami tak, że swoboda materii ogranicza się do ruchu kołowego wraz z sąsiadującymi powłokami. W ten sposób Kartezjusz uniknął niemiłego spotkania z Inkwizycją – nieruchoma Ziemia jest po prostu *niesiona* przez sfery niebieskie. Zjawisko grawitacji wyjaśnił natomiast za pomocą *skłonności odśrodkowej* cząstek; te o *tendencji* mniejszej od otaczających je powłok są spychane w dół (do centrum), w kierunku niższych pasm wirów aż do momentu, gdy zostanie przywrócona równowaga. Dla ilustracji swego pomysłu Kartezjusz wrzucał do wytworzonego w wiadrze wody wiru źdźbła trawy, które przesuwały się ku centrum lejka.

Z końcem XVII w. opisany powyżej model Wszechświata uważany był za bardzo intuicyjny i wyraźnie lepszy od konkurencyjnej teorii tajemniczych sił proponowanej przez pewnego Anglika. Dżentelmen ów, Izaak Newton, w swoim *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (*Matematyczne zasady filozofii przyrody*) przedstawił rewolucyjny i odnoszący się do samego sedna interesującej nas sprawy pogląd. Newton pierwszy zdał sobie sprawę, że to jedna i ta sama siła umożliwia ruch planet po ich (eliptycznych) orbitach i sprawia, że jabłka spadają z drzew na ziemię. Newton zauważył podobieństwo między grawitacją i obrotem – planety nie krążą bez powodu wokół Słońca, tylko nieustannie na nie spadają. Ponadto Newton zaproponował ideę absolutnego czasu i przestrzeni absolutnej jako dwóch niezależnie istniejących podmiotów. By wykazać absolutność przestrzeni, Newton wykonał następujący eksperyment: wiszące na skręconej linie wiadro z wodą puszczamy swobodnie. Początkowo – w stosunku do obserwatora – tylko wiadro się obraca tj. powierzchnia wody jest płaska, a naczynie przesuwa się w stosunku do spoczywającego płynu. Z czasem jednak moment pędu wiadra jest przekazywany do płynu, który wkrótce zaczyna się odsuwać od osi rotacji w kierunku brzegów wiadra, przyjmując charakterystyczny wklęsły kształt wiru. Płyn znajduje się teraz w spoczynku w stosunku do wiadra, a porusza się względem obserwatora. Po zatrzymaniu wiadra powierzchnia wody przez chwilę zachowuje wklęsły, względem wiadra i obserwatora, kształt. Z punktu widzenia wiadra wklęsłość oznacza zarówno rotację, jak i stan spoczynku, jednak dla Newtona, obserwującego doświadczenie z oddali, oznacza zawsze stan rotacji. Absolutna przestrzeń jest zatem przestrzenią niezwiązanego z badanym zjawiskiem obserwatora, znajdującego się w spoczynku. Współczesny Newtonowi Gottfried Leibniz był naczelnym krytykiem idei absolutnej przestrzeni i czasu. Używając argumentów filozoficznych, Leibniz dowodził, że skoro istoty ludzkie nie są w stanie doświadczyć (tj. zmierzyć) absolutu, nie mają również podstaw do twierdzenia, że ów w ogóle istnieje.

Principia Newtona powodowały na początku wiele dyskusji i wątpliwości. Na przykład Swift, Münchhausen, Blake i Malfilâtre ośmieszali ideę grawitacji, atakując Newtona *ad personam*; pisano też wiersze o pięknie wirów. Dopiero jakiś czas po śmierci Newtona jego teoria ostatecznie zastąpiła kartezjańskie myślenie. Wśród obecnych na pogrzebie w 1727 r. był także francuski poeta Wolter. Po trzech latach banicji za kąśliwą krytykę francuskiej arystokracji, które spędził w Londynie, Wolter powrócił do Paryża z listą nowych pomysłów i pakietem pism filozoficznych (*Lettres philosophiques*) – niestety, niemal natychmiast po ich publikacji znalazł się za sprawą Ludwika XV ponownie na indeksie. Jeśli chodzi o naukę, Wolter był pod silnym wpływem brytyjskiego empiryzmu i wyśmiewał kartezjańską wirową fizykę jako nadmiernie poetycką i przestarzałą. Pisał, że wypełniony wirami świat Paryża różni się zasadniczo od „próżnego” Londynu, a przekonania Kartezjusza, uważającego światło za cechę powietrza, konfrontował z obliczeniami Newtona, który czas, w jakim światło przebywa drogę Słońce–Ziemia, szacował na około sześciu i pół minuty. Pogląd Newtona przeważył.

Ernst Mach, najbardziej znany krytyk Newtona, przeanalizował doświadczenie z obracającym się wiadrem w *Die Mechanik in ihrer Entwicklung* (*Nauka mechaniki*, 1883 r.), stwierdzając, że absolutna przestrzeń Newtona ma sens jedynie wtedy, gdy utożsami się ją ze sferą gwiazd stałych. Mach uznał, że eksperyment Newtona

Rozwiązanie zadania M 1368.
Odpowiedź: Pokrycie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy n jest podzielne przez 4.



Przyjmijmy, że kwadrat $n \times n$ udało się pokryć dostępnymi płytkami. Skoro pole płytki wynosi 4, to n musi być parzyste, powiedzmy $n = 2m$. Rozważmy kolorowanie naszego kwadratu jak standardowej szachownicy i zauważmy, że każda płytka jest jednego z dwóch rodzajów: zawiera 3 czarne pola lub 1 czarne pole. Niech liczba płytek pierwszego rodzaju wynosi k, a drugiego l. Zliczając czarne i białe pola, otrzymujemy $3k + l = n^2/2 = 2m^2$ oraz $k + 3l = 2m^2$ (dzięki temu, że n jest parzyste, mamy po równo pól czarnych i białych!). Stąd w szczególności $k = l$, więc $4k = 2m^2$, zatem m jest parzyste, a n – podzielne przez 4.

Z drugiej strony, łatwo znaleźć pokrycie kwadratu 4×4 spełniające warunki zadania, więc także dowolnego kwadratu $n \times n$ dla n będącego wielokrotnością 4.

mówi nam jedynie, że ruch wody w stosunku do ścianek wiadra nie wywołuje żadnej zauważalnej siły odśrodkowej – jest ona natomiast wynikiem obrotu względem Ziemi i wszystkich innych masywnych ciał niebieskich. Woda obraca się w stosunku do całej materii we Wszechświecie; jeśli by jej zabrakło, powierzchnia wody pozostałaby zawsze płaska. Oznacza to, że istnieje relacja między obserwatorem lokalnym i odległym.

Tzw. słaba zasada równoważności stawia znak równości między masą grawitacyjną i inercjalną, podczas gdy pełna zasada utożsamia grawitację i przyspieszenie.

Myśl ta zainspirowała Alberta Einsteina tak głęboko, że nazywał ją zasadą Macha i stosował na równi z zasadą równoważności w trakcie formułowania ogólnej teorii względności. Poprzez zastosowanie do opisu grawitacji geometrii riemannowskiej Einstein scalił czas i przestrzeń. Od tej pory te dwa, poprzednio autonomiczne, byty nie mogły już istnieć samodzielnie, lecz wyłącznie jako splot, czterowymiarowa *czasoprzestrzeń*. W 1916 r. Einstein był w stanie opisać, w jaki sposób materia wpływa na czas i przestrzeń – a także *vice versa* – za pomocą swych słynnych równań. W zależności od wybranego rozkładu materii (lub pól energii) znajduje się różne geometrie czasoprzestrzeni. Gdy chodzi o obracające się obiekty, w 1918 r. Josef Lense i Hans Thirring opisali okolice obracającego się, masywnego ciała „wlokącego” za sobą inercjalne układy odniesienia, czyli autentyczny czasoprzestrzenny wir – oto jak przyciąganie współdziała z obrotem! Miarę dryfu danego inercjalnego obserwatora można, oczywiście, obliczyć z geometrii danego problemu, i nie jest wcale zaskakujące, że efekt zależy zarówno od masy, jak i od momentu pędu rotującego centralnego ciała.

Spadający z nieskończoności obserwator z zerowym momentem pędu nie będzie poruszał się po linii prostej, tylko „zdryfuje” zgodnie z kierunkiem obrotu obiektu, na który spada.

Ogólna teoria względności najbardziej ekstremalne odkształcenie czasoprzestrzeni przewiduje w pobliżu rotujących czarnych dziur. Te barbarzyńskie obiekty pojawiają się jako osobliwości w rozwiązaniach równań pola Einsteina w obszarach czasoprzestrzeni tak zwartych, że nawet światło nie jest w stanie z nich uciec. Poza światem równań czarne dziury nie ujawniają się chętnie, z ukrycia kierując ruchami gwiazd i gazu, ściąganego w świecących spiralach ze znajdujących się zbyt blisko obiektów. I choć efekty te skalują się zwykle z masą czarnej dziury, dopiero uwzględnienie spinu w pełni tłumaczy zawiłości obserwacji, a to z pewnością warte jest przedstawionych powyżej naukowych „zawirowań”.

Zwartość według astrofizyków: masa danego obiektu podzielona przez rozmiar.

tłumaczenie: M. B.

Wyniki XXIX Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 7–10 VI 2012

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2012/2013 zaproponowane przez Jury tematy to:

- figury magiczne,
- paradoksy i sofizmaty,
- historia symboliki matematycznej,
- geometria fraktalna,
- twierdzenia o wartości średniej,
- punkty ekstremalne w zadaniach,
- twierdzenia typu Ramseya,
- metoda niezmienników,
- dzielenie sekretu,
- Leibniz vs. Newton,
- półprawdy, kłamstwa i statystyki,
- abstrakcja,
- matematyczne modele zmian klimatu,
- modele matematyczne w epidemiologii i immunologii,
- wielkie katastrofy ekologiczne w liczbach,
- oraz matematyka okiem plastyka.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; www.spinor.edu.pl

Jury
w składzie: dr hab. Janusz Morawiec – przewodniczący, dr Tomasz Bielaczyc, dr Paweł Błaszczyk, dr Adrian Brückner, dr Paweł Gładki, dr Piotr Kalemba, dr Maria Kania, mgr Renata Kawa, dr Rafał Kucharski, dr Michał Machura, dr Marian Podhorodyński, dr Barbara Przebieracz, dr Małgorzata Serwecińska, dr Jolanta Sobera, dr Anna Szczerba-Zubek, mgr Artur Zieliński,
postanowiło przyznać:

I miejsce: **Karol Bacik** z VIII LO w Katowicach za pracę
Ciągi κ – odkrycie czy klapa?;
II miejsce: **Adam Baranowski** z I LO w Sopocie za pracę
Z prostej w płaszczyznę, czyli jak algebrą zawojować geometrię;
III miejsce: **Piotr Pikul** z VIII LO w Katowicach za pracę
Nieznane wykresy znanych funkcji;

wyróżnienia: **Aleksander Horawa** z I Społ. L w Warszawie za pracę
Pewne własności skończonych przestrzeni metrycznych,
Mariusz Nowak z VIII LO w Katowicach za pracę
Rozwiązywanie równań nieliniowych na przykładzie solitonów,
Martyna Waniek z II LO w Wodzisławiu Śląskim za pracę
Matematyka do wzięcia w rękę
oraz
Agata Drewniak z I LO w Pszczynie za pracę
Jak zarobić a się nie narobić – prwadopodobieństwo.

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację
nauczyciele i uczniowie zgodnie nagrodzili **Karola Bacika**.