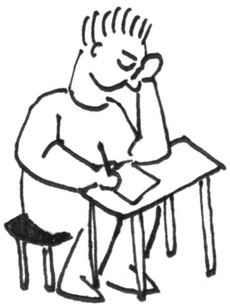
Klub 44



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 647, 648

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2012

647. Dany jest przedział otwarty, którego końcami są kwadraty dwóch kolejnych liczb naturalnych, większych od 1. Dowieść, że w tym przedziale można znaleźć trzy różne liczby naturalne a, b, c takie, że a^2+b^2 dzieli się przez c.

648. Niech (F_n) będzie ciągiem Fibonacciego: $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$. Udowodnić, że ciąg $\bigl(\sqrt[n]{F_{n+2}}\bigr)$ jest malejący.

Zadanie 648 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2012

Przypominamy treść zadań:

643. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych $m \geqslant 3$, $n \geqslant 6$, spełniające równanie
$$\binom{n}{6} = \frac{8m-4}{15m}\binom{m}{3}.$$

644. Dana jest liczba rzeczywista $\alpha > 1$. Obliczyć minimalną wartość funkcji
$$f(x) = (2-x)^{\alpha}(1+x^{\alpha})$$
na przedziale $\langle 0; 1\rangle$.

643. Rozpisujemy symbole dwumianowe po obu stronach:
$$\frac{n(n-5)\cdot(n-1)(n-4)\cdot(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = \frac{2(4m-2)}{15m}\cdot\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3};$$
skracamy, co się da, i otrzymujemy równanie
$$(n^2-5n)(n^2-5n+4)(n^2-5n+6) = (4m-2)(4m-4)(4m-8).$$
Wprowadzamy oznaczenie $P(x) = x(x+4)(x+6)$ i przepisujemy równanie jako
$$P(n^2-5n) = P(4m-8).$$
W zbiorze liczb dodatnich wielomian P jest funkcją rosnącą; stąd równoważne równanie
$$n^2-5n = 4m-8.$$
Gdy $n \equiv 2$ lub 3 (mod 4), lewa strona ostatniego równania nie dzieli się przez 4; brak rozwiązań. Natomiast każda liczba $n \geqslant 6$, spełniająca warunek $n \equiv 0$ lub 1 (mod 4), wraz z liczbą $m = (n^2-5n+8)/4$ daje parę, spełniającą ostatnie równanie – więc i równoważne mu równanie wyjściowe.

644. Zróbmy prostą zamianę zmiennej: $x = 1-t$; $t \in \langle 0; 1\rangle$. Uzyskujemy ciąg zależności (korzystając w pewnym momencie z nierówności Bernoulliego dla wykładnika rzeczywistego $\alpha > 1$):
$$\begin{aligned} f(1-t) &= \bigl(1+t\bigr)^{\alpha}\bigl(1+(1-t)^{\alpha}\bigr) = \\ &= \bigl(1+t\bigr)^{\alpha} + \bigl(1-t^2\bigr)^{\alpha} \geqslant \\ &\geqslant \bigl(1+\alpha t\bigr) + \bigl(1-\alpha t^2\bigr) = \\ &= 2 + \alpha t(1-t) \geqslant 2. \end{aligned}$$
Dla $t = 0$ nierówność staje się równością: $f(1) = 2$. Jest to wartość minimalna funkcji f na przedziale $\langle 0; 1\rangle$.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 631 ($WT = 3{,}01$) i 632 ($WT = 1{,}68$) z numeru 12/2011

Jerzy Cisło	Wrocław	45,06
Paweł Kubit	Kraków	44,99
Tomasz Tkocz	Rybnik	42,75
Zbigniew Skalik	Wrocław	38,93
Roksana Słowik	Knurów	38,71
Michał Miodek	Zawiercie	37,56
Adam Dzedzej	Gdańsk	33,55
Tomasz Wietecha	Tarnów	33,02

Dwaj uczestnicy, których nazwiska otwierają tabelę, prezentacji nie wymagają – są z nami od dawna; kolejne czterdziestkoczwórki zaliczają co chwila: Paweł Kubit po raz piąty, a Jerzy Cisło – już po raz dziewiąty!

* * *

Powyższa tabela przedstawia stan nieco zdezaktualizowany. Powinna była znaleźć się w numerze 8/2012. Nie znalazła się tam przez zwykłe niedopatrzenie, za które oczywiście gorąco przepraszamy.

Tabela uwględniająca następną serię dwóch zadań została umieszczona – już zgodnie z planem – w numerze 9/2012.

A teraz tabela po kolejnej serii – tu, gdzie jej zaplanowane miejsce:

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 635 ($WT = 1{,}82$) i 636 ($WT = 1{,}74$) z numeru 2/2012

Tomasz Tkocz	Rybnik	42,75
Roksana Słowik	Knurów	40,39
Adam Dzedzej	Gdańsk	40,33
Zbigniew Skalik	Wrocław	40,02
Michał Miodek	Zawiercie	37,56
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,76
Paweł Łabędzki	Kielce	34,50

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2012

Zadania z fizyki nr 544, 545

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

544. Cienkościenna, nieprzewodząca sfera o promieniu R i masie M naładowana jest równomiernie ładunkiem Q. W sferze znajdują się dwa niewielkie otwory leżące na tej samej średnicy. Cząstka o masie m i ładunku q jednoimiennym z Q zaczyna zbliżać się do sfery z bardzo dużej odległości wzdłuż prostej przechodzącej przez otwory, z prędkością początkową v. W chwili początkowej sfera spoczywa. Ile czasu cząstka znajdować się będzie wewnątrz sfery? Przyjmij, że efekty magnetyczne są zaniedbywalne.

545. Satelita poruszający się po orbicie kołowej o promieniu R wokół planety o promieniu r został przyhamowany i zaczął poruszać się po orbicie eliptycznej, stycznej do powierzchni planety. Wyznaczyć czas spadania satelity na planetę. Przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni planety wynosi $\mathbf{g}$.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2012

Przypominamy treść zadań:

540. Po poziomym torze rusza z miejsca długi pociąg towarowy i na drodze $l = 1$ km osiąga prędkość $v = 60$ km/h. Lokomotywa ma masę $M = 200$ ton, a każdy z czteroosiowych wagonów o masie $m_1 = 20$ ton ma ładowność $m_2 = 80$ ton i koła o promieniu $r = 500$ mm. Ile maksymalnie obciążonych wagonów może mieć ten pociąg?

541. Szklana kulka o średnicy 5 mm znajduje się roztworze gliceryny. W chwili początkowej kulka ta została upuszczona i zaczęła spadać. Znaleźć początkowe przyspieszenie i prędkość graniczną, jaką osiągnie kulka.

540. Siła ciągu F_c to tarcie statyczne kół lokomotywy o szyny, a opory ruchu F_{op} to siły tarcia tocznego. Podczas rozpędzania się pociągu zachodzi równość

$$F_c - F_{\mathrm{op}} = (M + nm)a, \quad \text{czyli} \quad \mu M\mathrm{g} - nkm\mathrm{g}/r = (M + nm)a,$$

gdzie μ to współczynnik tarcia statycznego, a k – tarcia tocznego, $m = m_1 + m_2$ jest masą obciążonego wagonu, zaś n to ilość wagonów. Ponieważ $al = v^2/2$, więc

$$n \leqslant \frac{M(\mu\mathrm{g} - a)}{m(k\mathrm{g}/r + a)} = \frac{M(\mu\mathrm{g} - v^2/2l)}{m(k\mathrm{g}/r + v^2/2l)}.$$

Jeżeli przyjmiemy, że dla stali $\mu = 0{,}15$ i $k = 5 \cdot 10^{-5}$ m, otrzymamy maksymalną liczbę wagonów równą 19.

541. Oznaczmy przez r promień kulki, przez v jej prędkość i przez a przyspieszenie. Przyjmijmy realistyczne założenie, że gęstość gliceryny to $\rho_g = 1{,}2 \cdot 10^3$ kg/m^3, gęstość szkła $\rho_s = 2{,}53 \cdot 10^3$ kg/m^3, a lepkość dynamiczna jest równa $\eta = 5 \cdot 10^{-2}$ Pa $\cdot$ s. Równanie ruchu kulki w cieczy jest następujące:

$$m\mathrm{g} - F_w - F_{\mathrm{op}} = ma,$$

gdzie F_w jest siłą wyporu, a F_{op} siłą oporów ruchu działającą na kulkę. Jeżeli założymy, iż lepkość gliceryny jest tak duża, że można posługiwać się prawem Stokesa, będziemy mieli $F_{\mathrm{op}} = 6\pi\eta vr$. Stąd oraz z prawa Archimedesa otrzymamy wyrażenie, z którego można wyznaczyć przyspieszenie kulki:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_s \mathrm{g} - \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_g \mathrm{g} - 6\pi\eta vr = \frac{4}{3} r^3 \rho_s a.$$

Prędkość graniczną znajdujemy z warunku, że przyspieszenie ma być równe zeru. Zatem

$$v = \frac{2r^2\mathrm{g}(\rho_s - \rho_g)}{9\eta} \approx 0{,}36 \text{ m/s}.$$

To pozwoli obliczyć, że liczba Reynoldsa wynosi

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_g vr}{\eta} \approx 22,$$

a więc jest tak mała, że posłużenie się prawem Stokesa było uzasadnione.

Przyspieszenie początkowe można otrzymać z równania ruchu dla prędkości równej zeru:

$$a_0 = \frac{(\rho_s - \rho_g)}{\rho_s}\mathrm{g} \approx 5{,}3 \text{ m/s}^2.$$