Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej

www.sem.edu.pl

Wszystko może się przydać

Panuje przekonanie, że w nauczaniu matematyki powinno się eksponować fakt, że ma ona zastosowania. Gdy przyjrzeć się podręcznikom, a zwłaszcza testom kwalifikacyjnym, trudno oprzeć się wrażeniu, że są to rzeczy w stylu mierzenia wysokości piramidy za pomocą długości jej cienia i twierdzenia Talesa, lub też zadań w stylu: *jeśli dwóch robotników kopie rów w ciągu* 2 *godzin, to ilu ich potrzeba, aby ten rów wykopać w* 15 *sekund*? (odpowiedź: 1440).

Aby pomóc w przełamaniu tej wstydliwej sytuacji, chcę podać przykład konkretnego, przemysłowego wykorzystania prostego faktu stereometrycznego.

Każdy wie, że płytki odblaskowe naszywane na ubrania czy przyczepiane do rowerów zbudowane są z wielu malutkich naroży złożonych z trzech lusterek, z których każde jest prostopadłe do pozostałych. Bierze się to z faktu, iż *złożenie trzech symetrii względem płaszczyzn parami prostopadłych to symetria względem punktu ich przecięcia*, a wobec tego każdy promień jest odbijany jako równoległy do padającego, czyli wraca w kierunku źródła padającego światła.

Rozwiązanie zadania F 820.
Nacisk na palec położony dalej od środka ciężkości jest mniejszy, a więc mniejsze tarcie powoduje, że kij przesuwa się po nim łatwiej, zatem szybciej. Palce spotkają się pod środkiem ciężkości kija.

Prosty dowód jest taki: Potraktujmy krawędzie przecięcia płaszczyzn jak osie układu współrzędnych – wtedy symetrie względem płaszczyzn będą odpowiadały zmianie znaku jednej ze współrzędnych. Wobec tego z punktu o współrzędnych (x, y, z) otrzymamy punkt $(-x, -y, -z)$.

I jeszcze wniosek: *aby otrzymać symetrię względem danego punktu, można* **dowolnie** *obrać przechodzące przez niego płaszczyzny, byle były wzajemnie prostopadłe.*

Ale nie o to zastosowanie mi tu chodzi. W wielu celownikach optycznych (tak, chodzi o uzbrojenie!) potrzebne jest ustawienie dwóch lusterek **dokładnie** pod kątem prostym. Jak łatwo zgadnąć, uzyskanie tego przez korygowanie ustawienia, aż będzie dostatecznie dokładne, jest i pracochłonne, i nie do końca precyzyjne.

Ale można tu wykorzystać wzmocnienie powyżej wyróżnionego twierdzenia: *złożenie trzech symetrii względem płaszczyzn jest symetrią względem punktu ich przecięcia wtedy i tylko wtedy, gdy płaszczyzny te są parami prostopadłe.*

Dowód. Przypuśćmy, że symetrię względem punktu P można otrzymać ze złożenia symetrii względem płaszczyzn α, β, γ. Weźmy teraz przechodzące przez P prostopadłe płaszczyzny π i ρ, które są prostopadłe również do α. Mamy więc

$$S_\alpha S_\beta S_\gamma = S_\alpha S_\pi S_\rho, \quad \text{czyli} \quad S_\beta S_\gamma = S_\pi S_\rho.$$

W ostatniej równości mamy do czynienia z dwoma obrotami, a zatem kąt między wyznaczającymi je płaszczyznami musi być taki sam. Stąd $\beta \perp \gamma$. Podobnie wykazujemy prostopadłość α do β i γ.

Skoro tak, to można prostopadłość dwóch luster sprawdzać, patrząc, czy da się do nich dostawić trzecie tak, aby odbijały każdy promień jako równoległy.

Każdy to brzmi strasznie. Ale zastanówmy się, czy nie wystarczy sprawdzić odbicia tylko np. dla trzech różnych kierunków. Czytelnik Zmyślny od razu będzie wiedział, że nie. Ale może wystarczy dla czterech?

Tu należy przypomnieć sobie, przez ile elementów przekształcenie geometryczne jest jednoznacznie określone.

Kolejny problem to (gdy już ustalimy skończoną listę kierunków do sprawdzenia), jak sprawdzić, czy odbity promień jest równoległy do padającego?

Kierunek to pęk prostych równoległych, więc może wiązka cienkich rurek coś by pomogła?

Przytoczony przykład jest autentyczny. Przypomniał mi się, bo 5 lipca zmarł mój kolega, Ludomir Włodarski (napisaliśmy nawet wspólnie książkę *O geometrii dla postronnych*; dla *Delty* napisał wspólnie z Maciejem Bryńskim pierwszy tomik *Biblioteczki Delty* o konstrukcjach geometrycznych). Był bardzo uzdolnionym geometrą, ale prawdziwą sensacją był (wówczas – połowa lat siedemdziesiątych – praktycznie niespotykany) fakt, że bezpośrednio po doktoracie poszedł pracować do przemysłu, do Polskich Zakładów Optycznych. Usprawnienie kontroli prostopadłości luster, oparte na opisanym tu pomyśle, było jego pierwszym dokonaniem w nowym miejscu pracy. Potem, rzecz jasna, doprowadził do wykorzystania wielu poważniejszych twierdzeń geometrii (zwłaszcza rzutowej) w praktyce przemysłowej.

Marek KORDOS