Zadania Olimpiady Informatycznej będą opublikowane w *Delcie* 11/2012

Olimpiada

Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Astronomicznej, Fizycznej, Matematycznej oraz Matematycznej Gimnazjalistów 2012/2013

LVI Olimpiada Astronomiczna

Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.

2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne.

3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, do **10 października 2012 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.

4. Uczniowie, którzy przyślą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do 20 października br. tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej olimpiady astronomicznej: `www.planetarium.edu.pl/oa.htm`.

5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, do **12 listopada 2012 r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.

6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).

7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod poniższym adresem w terminach podanych w p. 3 i 5. Decyduje data stempla pocztowego.

8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.

9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi). **Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć wypełnioną ankietę uczestnika, dostępną na stronie internetowej olimpiady:** `www.planetarium.edu.pl/oa.htm`**.**

10. Zawody II stopnia odbędą się **14 stycznia 2013 r.** Zawody III stopnia odbędą się w dniach **od 7 do 10 marca 2013 r.**

11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.

12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej
Planetarium Śląskie
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. Po wyniesieniu satelity na wysokość H silniki rakietowe nadają mu prędkość $v = 6{,}73$ km/s, prostopadłą do promienia wodzącego satelity. Przedyskutuj problem minimalnej wysokości H nad powierzchnią Ziemi, na jaką należy tego satelitę wynieść, by prędkość ta wystarczyła do wprowadzenia go na orbitę okołoziemską.

Dla znalezionej orbity oblicz jej wielką półoś i mimośród oraz okres obiegu i prędkość polową satelity.

Zakładamy kulisty kształt Ziemi i przyjmujemy dla niej wartości: promienia $R = 6380$ km i masy $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg.

2. W kolejnych wierszach tabelki podano wybrane współrzędne środka tarczy Księżyca w pewnej miejscowości. Uzupełnij puste pola dotyczące środka tarczy słonecznej i ewentualnego zjawiska, możliwego do zaobserwowania w tej miejscowości w rozpatrywanych w tabeli przypadkach.

Co w każdym z tych przypadków można powiedzieć o azymutach Księżyca i Słońca oraz o czasie gwiazdowym, w którym zachodzą?

Księżyc				Słońce			zjawisko
faza	wysokość	rektascensja	deklinacja	wysokość	rektascensja	deklinacja	
pełnia	90°	12^{h}	0°				
nów	90	12	0				
pełnia	−90	12	0				
nów	−90	0	0				
pełnia	90	0	0				
nów	90	0	0				

3. Trzy młode gwiazdy, o typach widmowych: B2, F5 i K8, zaczynające spalać w swych wnętrzach wodór, mają jednakowe jasności obserwowane.

Uszereguj te gwiazdy wzrastająco według ich: mocy promieniowania, mas, temperatur efektywnych, średnic i odległości od obserwatora. Czy gwiazdy te mogą należeć do tej samej asocjacji?

Podaj krótkie uzasadnienie odpowiedzi. Potrzebne dane wyszukaj samodzielnie.

4. Oszacuj prędkość, z jaką wyrzucany jest gaz przez wulkany na Io, wiedząc, że wysokości pióropuszy gazu sięgają do 300 kilometrów.

Przyjmij, że promień Io wynosi 1815 km, a [jej] masa $8{,}95 \cdot 10^{22}$ kg.

Zadania obserwacyjne

Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. Wykonaną obserwację astronomiczną należy odpowiednio udokumentować.

1. Na podstawie wykonanych aparatem cyfrowym fotografii dowolnej planety wyznacz jej dobowy ruch własny (rozumiany podobnie jak roczny ruch własny gwiazdy). Do rozwiązania dołącz oryginalne zdjęcia w formie plików JPG, zawierających pełną informację o zdjęciu. Pliki te, o nazwie w formie „nazwiskoimię.jpg" można również przesłać pocztą elektroniczną pod adresem: `olimpiada@planetarium.edu.pl`.

2. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji, prowadzonych w ostatnim roku.

Internetowe zadanie obserwacyjne

3. Korzystając ze strony internetowej: `http://sohowww.nascom.nasa.gov/data/realtime/hmi_igr/1024/latest.html`, przeprowadź tygodniową obserwację dowolnie wybranej plamy słonecznej w celu wyznaczenia momentu, w którym jej odległość od środka tarczy słonecznej była minimalna. Podaj w kilometrach wartość tej minimalnej odległości, mierzonej po powierzchni fotosfery.

Do rozwiązania dołącz rysunek wyglądu tarczy Słońca w dniu znalezionego minimum, z zaznaczonym położeniem obserwowanej plamy.

Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 12 listopada 2012 r.

Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych.*
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami.*
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką.*
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów.*
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba.
- Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie.*
- Poradniki i kalendarze astronomiczne dla obserwatorów nieba.

LXII Olimpiada Fizyczna

Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przesyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach:

część I – do 12 października br.
część II – do 16 listopada br.

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II.

Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej `http://www.kgof.edu.pl`.

Krótka informacja na temat poprawnej redakcji rozwiązań zadań Olimpiady Fizycznej

Zadania powinny być rozwiązane jasno, przejrzyście i czytelnie. Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce papieru. Poszczególne etapy rozumowania należy opisać, a wszelkie zależności fizyczne, które nie są wprost podane w podręcznikach szkolnych – udowodnić. Należy również objaśnić wszelkie oznaczenia występujące w rozwiązaniach zadań. Rysunki mogą być wykonane odręcznie – muszą być jednak przejrzyste i czytelne oraz dobrze opisane w tekście.

Rozumowanie przedstawione w rozwiązaniach nie może zawierać luk logicznych. Każdy krok rozumowania powinien być zwięźle opisany, a przyjęte założenia – klarownie uzasadnione. Rozwlekłość jest uznawana za ujemną cechę pracy.

Rozwiązanie zadania teoretycznego powinno być poprzedzone analizą problemu poruszanego w zadaniu, a zakończone dyskusją wyników. Rozwiązania zadań teoretycznych powinny odnosić się do ogólnej sytuacji opisanej w treści, dane liczbowe (o ile podane) powinny być podstawione dopiero do ostatecznych wzorów.

W zadaniach doświadczalnych należy wyraźnie rozgraniczyć części teoretyczną i doświadczalną. Część teoretyczna zadania doświadczalnego powinna zawierać analizę problemu wraz z wyprowadzeniem niezbędnych wzorów (o ile nie ma ich wprost w podręcznikach szkolnych) oraz sugestię metody doświadczalnej. Część doświadczalna powinna zawierać m.in. opis układu doświadczalnego ilustrowany rysunkiem, opis wykonanych pomiarów, wyniki pomiarów, analizę czynników mogących wpływać na wyniki (jak np. rozpraszanie energii lub opory wewnętrzne mierników), opracowanie wyników wraz z dyskusją niepewności pomiarowych. Wykresy do zadania doświadczalnego powinny być starannie wykonane, najlepiej na papierze milimetrowym. Ocenie podlegają wyłącznie elementy rozwiązania opisane w pracy. W zadaniach doświadczalnych osobno oceniana jest część teoretyczna i część doświadczalna.

W rozwiązaniach można posługiwać się dowolnym układem jednostek, chyba że tekst zadania mówi wyraźnie inaczej.

Część I (termin wysyłania rozwiązań – 12 października 2012 r.)

Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki.

Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksimum 4 punkty.

Uwaga: potrzebne do rozwiązania niektórych zadań wartości stałych należy wyszukać samodzielnie.

1. Wiadomo, że lodówka, nawet z otwartymi drzwiami, nie może chłodzić pomieszczenia, w którym się znajduje. Dlaczego zatem w częściach hipermarketów, w których znajdują się chłodnie, temperatura jest wyraźnie niższa niż w pozostałych częściach sklepu?

2. Idealnie przewodzącą, doskonale czarną sferę rozcięto na dwie półsfery, które bardzo nieznacznie rozsunięto i izolowano od siebie termicznie. Na pierwszą półsferę pada wiązka lasera utrzymująca ją w temperaturze T_1. Jaka jest równowagowa temperatura drugiej półsfery?

Układ znajduje się w próżni, z dala od innych niż wiązka lasera źródeł promieniowania.

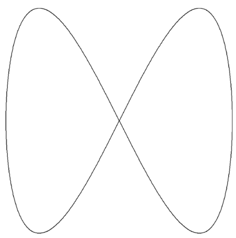
3. Na piłce futbolowej położono piłeczkę pingpongową, a następnie całość puszczono swobodnie na podłogę z wysokości h. Zakładając, że wszystkie odbicia są idealnie sprężyste, pomijając opory ruchu i zaniedbując masę piłeczki pingpongowej w porównaniu z masą futbolowej, wyznacz wysokość, na jaką podskoczy po odbiciu piłeczka pingpongowa.

Pomiń również wielkość piłek w porównaniu z h.

4. Okulary służące do oglądania filmów trójwymiarowych (a właściwie stereoskopowych) w kinach mogą być m.in. następujących rodzajów:

a) polaryzacyjne, w których jeden okular polaryzuje światło liniowo w pewnej płaszczyźnie, a drugi w płaszczyźnie prostopadłej;
b) w których każdy okular przepuszcza światło o trzech długościach fali, z których oko (i mózg) może złożyć dowolny kolor, ale dla każdego z okularów są to inne długości.

Masz do dyspozycji dwie pary okularów jednego z wymienionych typów oraz źródło niespolaryzowanego, białego światła. W jaki sposób możesz rozstrzygnąć, z którym typem okularów masz do czynienia?



Rys. 1

5. Wykorzystując nitkę, zawieszono na statywie mały ciężarek, a następnie wprawiono go w ruch. Rzut toru tego ciężarka na płaszczyznę poziomą jest przedstawiony na rysunku 1. Narysuj szkic układu, w którym można otrzymać taki rzut toru, oraz podaj jego istotne parametry.

6. Na Księżycu przeprowadzono zawody w strzelaniu z armat na odległość. Pociski wystrzeliwano pod kątem 45° z bieguna Księżyca, a odległość mierzono wzdłuż południków. Wiadomo, że wpływ innych ciał niebieskich na ruch pocisku był zaniedbywalny. W komunikacie prasowym podano, że najlepsza armata osiągnęła wynik 9 tys. km. Jednak pewien fizyk po przeczytaniu tego komunikatu stwierdził, że taki rezultat jest niemożliwy. Dlaczego?

7. Postanowiono, że w trakcie „Ekologicznej wyprawy kosmicznej”, w czasie gdy statek kosmiczny porusza się z wyłączonym napędem z dala od gwiazd, energia elektryczna będzie wytwarzana wyłącznie przez silnik cieplny, pobierający ciepło z ciała podróżników. Jaka jest (teoretycznie) maksymalna sprawność takiego silnika? Wynik podaj z dokładnością do 0,2%.

8. Wewnątrz hermetycznie zamkniętego naczynia w kształcie walca o wysokości h znajduje się H_2O. W stanie początkowym temperatura wody i pary wynosi 20°C, a powierzchnia rozdziału para-woda jest w połowie wysokości naczynia, tzn. na wysokości $h/2$. Temperaturę we wnętrzu naczynia podwyższono do 400°C. Na jakim poziomie będzie znajdowała się powierzchnia rozdziału para-woda:

a) nie wyższym niż $h/4$, ale wyższym niż 0,
b) nie wyższym niż $h/2$, ale wyższym niż $h/4$,
c) niższym niż h, ale wyższym niż $h/2$,
d) w ogóle nie będzie powierzchni rozdziału para-woda?

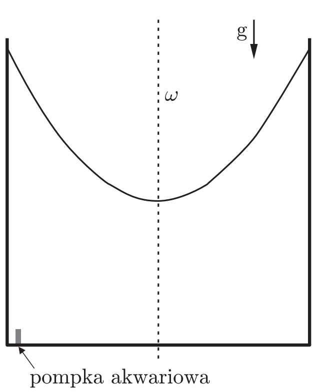
9. W odległości d od małego, ale silnego magnesu, na jego osi, znajduje się mała kulka wykonana z paramagnetyka.

Rys. 2

Ile razy wzrośnie siła działająca na kulkę, jeśli drugi taki sam magnes umieścimy (patrz rysunek 2):
(i) tuż obok pierwszego magnesu,
(ii) w odległości $2d$ od pierwszego magnesu, po „drugiej stronie” kulki?

10. Przez nieważki bloczek jest przerzucona nieważka lina. Jeden koniec trzyma sportowiec A o masie m, a drugi – sportowiec B o masie $2m$. Sportowcy początkowo stoją na podłodze, a w pewnej chwili zaczynają się wspinać po linie: sportowiec A z przyspieszeniem g względem liny, sportowiec B z przyspieszeniem 2g względem liny. Który ze sportowców szybciej dotrze do bloczka?

Pomiń opory ruchu i przyjmij, że liny cały czas pozostają pionowe.



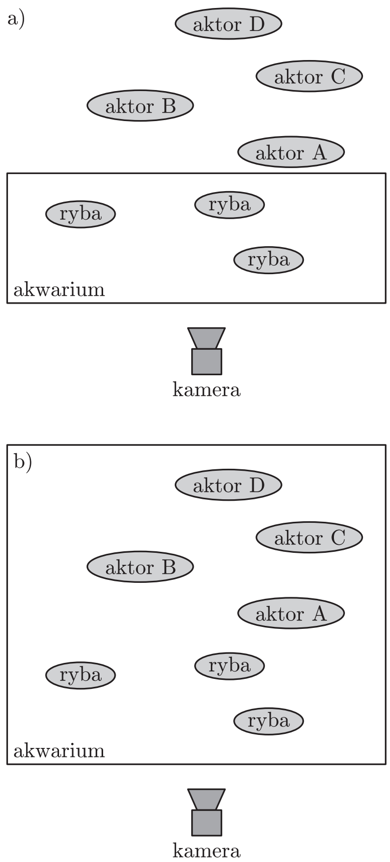
Rys. 3

11. Prostopadłościenne akwarium z wodą stoi na obracającej się tarczy (rys. 3). Naszkicuj (w rzucie prostopadłym na największą pionową ścianę akwarium) tor, po którym będą się poruszały bąbelki powietrza wydobywające się z pompki akwariowej.

12. Planowana energia protonów w akceleratorze LHC w CERN pod Genewą wynosi 7 TeV. Rozważmy obserwatora inercjalnego, poruszającego się względem Ziemi z taką samą prędkością, jak te protony. Jak długo dla tego obserwatora trwałaby podróż z Ziemi do najbliższej gwiazdy, odległej od nas o około 4 [lat świetlnych]?

Energia spoczynkowa protonu to około 0,9 GeV.

13. W cyfrowym aparacie fotograficznym światło po przejściu przez obiektyw pada na prostokątną, światłoczułą matrycę. Różne aparaty mogą mieć różne wielkości matryc, jeśli jednak proporcje matrycy oraz stosunek ogniskowej f obiektywu aparatu do przekątnej matrycy są takie same w różnych przypadkach, to w każdym z nich przedmiot sfotografowany z ustalonej odległości będzie zajmował taką samą część zdjęcia.



Rys. 4

Mamy do dyspozycji różne aparaty fotograficzne wraz z obiektywami o następujących parametrach:

a) $f = 6$ mm, $F = 1 : 1{,}8$,
b) $f = 14$ mm, $F = 1 : 3{,}5$,
c) $f = 5$ mm, $F = 1 : 3{,}1$,
d) $f = 5{,}1$ mm, $F = 1 : 3{,}5$,
e) $f = 10{,}4$ mm, $F = 1 : 3{,}5$,

gdzie f jest ogniskową, a $F = d/f$, gdzie d jest średnicą otworu przysłony aparatu.

Stosunek f do przekątnej matrycy jest taki sam w każdym z tych przypadków. Proporcje matrycy (i zdjęcia) są również takie same.

Uszereguj te aparaty według teoretycznej przydatności do robienia zdjęć przy słabym świetle, tzn. według ilości światła padającego na matrycę aparatu w takim samym czasie, od największej do najmniejszej.

Rozważ tylko sytuację, gdy odległość fotografowanych obiektów od aparatu jest znacznie większa od ogniskowej.

14. Siła Coriolisa jest to siła bezwładności, działająca na ciało o masie m poruszające się z prędkością $\vec{v}$ w układzie obracającym się z prędkością kątową $\vec{\omega}$ i wynosi $\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$. O ile wyższy w wyniku działania tej siły jest poziom wody na zachodnim brzegu Wisły niż na wschodnim jej brzegu w miejscu, gdzie Wisła ma szerokość 500 m i płynie na prostym odcinku na północ z średnią prędkością 1,5 m/s? Podaj wynik z dokładnością do jednej cyfry znaczącej.

Wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$ to wektor o wartości równej prędkości kątowej, jego kierunek to oś obrotu, a zwrot jest zgodny z regułą śruby prawoskrętnej.

15. W dawnych latach sceny filmów, w których bohaterowie filmu przebywali w wodzie, kręcono umieszczając między aktorami a kamerą duże akwarium. Rozważmy pojedynczy kadr z takiego filmu, przedstawiony na rysunku 4 schematycznie w widoku z góry. Podaj (jakościowo) różnice w wielkości obiektów widocznych w kadrze między przypadkami a) i b).

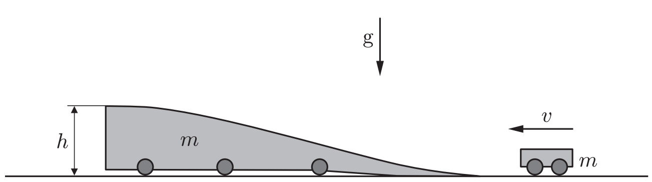
Część II (termin wysyłania rozwiązań – 16 listopada 2012 r.)

Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić nazwisko i imię oraz adres autora pracy, a także nazwę, adres szkoły i klasę oraz nazwisko i imię nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.

Zadania teoretyczne

Należy przesłać rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksimum 20 punktów.

T1. Na poziomej podłodze znajdują się mały wózek o masie m oraz duża, początkowo spoczywająca pochylnia o takiej samej masie m i wysokości h (patrz rysunek).



a) Jaką prędkość v_0 należy nadać wózkowi, aby wtoczył się na górną, poziomą część pochylni i zatrzymał względem niej?
b) Zakładając, że wózkowi nadano prędkość $v > v_0$, wyznacz odległość d między nim a pochylnią w chwili uderzenia o podłogę.

Pomiń tarcie, opór powietrza oraz momenty bezwładności kółek wózka i pochylni. Wózek w trakcie wtaczania nie odrywa się od powierzchni pochylni.

T2. W morzu, na głębokości h spoczywa wrak okrętu o masie m i średniej gęstości ρ. Postanowiono go wydobyć, przymocowując do niego, a następnie nadmuchując powietrzem specjalne balony.

Wyznacz minimalną pracę, jaka należy wykonać, by nadmuchać te balony, przy założeniu, że nadmuchiwane powietrze nie wymienia ciepła z otoczeniem.

Podaj wartość liczbową tej pracy dla $h = 100$ m, $m = 2000$ t, $\rho = 3{,}0$ g/cm^3.

Gęstość wody wynosi $\rho_w = 1{,}0$ g/cm^3, ciśnienie atmosferyczne tuż nad powierzchnią morza (skąd jest pobierane powietrze do nadmuchiwania balonów) – $p_0 = 1{,}0 \cdot 10^5$ Pa. Wrak leży na dnie, nie będąc w nim zakopany ani też przyssany do niego. Balony znajdują się na głębokości wraku. Pomiń masę powłok balonów oraz gęstość powietrza (również sprężonego) w porównaniu z gęstością wody. Molowe ciepło właściwe powietrza przy stałej objętości wynosi $C_V = 21$ J/(K $\cdot$ mol), przyspieszenie grawitacyjne – g $= 9{,}8$ m/s^2, uniwersalna stała gazowa – R $= 8{,}3$ J/(K $\cdot$ mol).

Dla przemiany adiabatycznej zachodzi związek $pV^{(C_V+R)/C_V} = \text{const}$.

T3. Wewnątrz równomiernie naładowanej ładunkiem Q (gdzie $Q < 0$) sfery o promieniu R znajduje się równomiernie naładowana sfera o potencjale równym potencjałowi w nieskończoności i promieniu $R/2$. Obie sfery są współśrodkowe.

Z wewnętrznej sfery, stycznie do niej, wylatuje elektron (o ładunku $e < 0$). Jaka jest minimalna wartość początkowej energii kinetycznej elektronu E_0, przy której dotrze on do zewnętrznej sfery? Przyjmij, że elektron porusza się z prędkością nierelatywistyczną.

T4 (zadanie numeryczne). Pozioma tarcza obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół pionowej osi. W odległości R od osi obrotu kładziemy na tarczy mały klocek o masie m, który w chwili początkowej nie porusza się względem układu inercjalnego, lecz ślizga się względem tarczy. Tarcie między klockiem a tarczą powoduje, że klocek zaczyna się poruszać. Możliwe są dwa przypadki:

a) po pewnym czasie klocek przestaje się ślizgać względem tarczy,
b) klocek stale ślizga się względem tarczy, oddalając się coraz bardziej od jej środka.

Wyznacz numerycznie przybliżoną wartość parametru

$$p = \frac{\mu g}{\omega^2 R}$$

(gdzie g jest przyspieszeniem ziemskim, a μ – współczynnikiem tarcia) będącą graniczną wartością między przypadkiem a) oraz b).

Wykonaj wykresy toru klocka dla p mniejszego o 0,1 od wartości granicznej oraz większego o 0,1 od tej wartości.

Wskazówka: Ruch układu można wyznaczyć numerycznie, np. korzystając z różnicowej postaci równań ruchu:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x(t)\,\Delta t, \quad v_x(t+\Delta t) = v_x(t) + \frac{F_x(t)}{m}\Delta t,$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + v_y(t)\,\Delta t, \quad v_y(t+\Delta t) = v_y(t) + \frac{F_y(t)}{m}\Delta t.$$

Uwaga: Rozwiązanie powinno być napisane na papierze i zawierać opis sposobu rozwiązania oraz wyniki i wykresy. Nie jest konieczne załączanie kodu programu lub arkusza kalkulacyjnego.

Dodatkowe informacje na temat zadań numerycznych można znaleźć w zadaniach numerycznych z poprzednich olimpiad oraz w rozwiązaniach tych zadań.

Zadania doświadczalne

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) zadań dowolnie wybranych z trzech podanych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksimum 40 punktów.

D1. Po zaparzeniu herbaty często zostawiamy ją na chwilę, aby ostygła. Po pewnym czasie stwierdzamy, że herbata ma niższą temperaturę, ale jest jej też odrobinę mniej. Jest to efektem parowania, czyli unoszenia z powierzchni cieczy cząsteczek, które mają największe energie kinetyczne. Skutkuje to – obok innych procesów, takich jak np. promieniowanie – obniżeniem temperatury herbaty.

Mając do dyspozycji

- kubek styropianowy z zaznaczonym poziomem 200 ml,
- termometr,
- wodę i olej (np. jadalny),
- czajnik, grzałkę albo inne urządzenie umożliwiające podgrzewanie wody,
- zegarek lub stoper,

sporządź wykres zależności szybkości parowania wody (w gramach na sekundę) od temperatury wody w zakresie 40–90°C.

Przyjmij upraszczające założenie, że podczas całego eksperymentu ubytek masy wody wskutek parowania jest niewielki. Dane są: ciepło właściwe wody $C_w = 4200$ J/(kg · K), ciepło parowania wody $C_p = 2{,}26$ MJ/kg, gęstość wody $\rho = 1000$ kg/m^3.

Wskazówka: Dyskusja zależności wyników od wilgotności powietrza nie jest celem zadania, jednak wilgotność nie powinna być bardzo wysoka, więc doświadczenie nie może być wykonane w zaparowanym zamkniętym pomieszczeniu ani przy deszczowej pogodzie. Należy też unikać miejsc, w których panuje nadmierny przewiew.

D2. Mając do dyspozycji:

- soczewkę skupiającą o ogniskowej około 5 cm (znanej tylko orientacyjnie),
- wysokie naczynie z wodą (np. wannę),
- linijkę,

wyznacz współczynnik załamania materiału, z którego wykonana została soczewka.

Przyjmij, że współczynniki załamania powietrza i wody wynoszą odpowiednio 1 i 1,33. Możesz wykorzystać dostępne źródło światła, np. lampę zamocowaną pod sufitem. *UWAGA*: Zachowaj ostrożność podczas obsługi jakichkolwiek urządzeń elektrycznych, np. lampy, w pobliżu naczynia z wodą. W szczególności nie dotykaj tych urządzeń mokrymi rękoma.

D3. Najprostszy kondensator składa się z dwóch przewodników (tzw. okładek) rozdzielonych powietrzną przerwą. Zazwyczaj przerwa pomiędzy okładkami jest wypełniona izolatorem o względnej przenikalności elektrycznej ε dużo większej od 1, co pozwala na wytwarzanie kondensatorów o stosunkowo dużych pojemnościach i małych rozmiarach. Jednym z istotnych parametrów każdego kondensatora jest zależność jego pojemności od temperatury.

Mając do dyspozycji

- kondensator ceramiczny o pojemności kilkudziesięciu nF,
- opornik o oporze kilku kΩ,
- generator sygnału sinusoidalnego o częstości kilku kHz,
- dwa woltomierze lub oscyloskop,
- kubek, wodę i czajnik (lub inne urządzenie umożliwiające podgrzewanie wody),
- termometr,
- foliową torebkę śniadaniową,
- kable i złączki niezbędne do zestawienia układu,

w przedziale temperatur 30–80°C wyznacz współczynnik $\alpha = \Delta\varepsilon/(\varepsilon \cdot \Delta T)$ opisujący, jak przenikalność elektryczna izolatora pomiędzy okładkami kondensatora zależy od temperatury; $\Delta\varepsilon$ jest zmianą przenikalności odpowiadającą niewielkiej zmianie temperatury ΔT.

Uwaga: Nie używaj kondensatora elektrolitycznego, tantalowego, ani foliowego. Jeśli nie możesz zdobyć kondensatora ceramicznego, to przed 30 września br. prześlij pod adresem KGOF zaadresowaną do siebie kopertę ze znaczkami. KGOF przyśle ci odpowiedni kondensator. Jeśli nie masz dostępu do generatora sygnału lub oscyloskopu, to możesz użyć komputera z kartą dźwiękową i odpowiednim oprogramowaniem, np. Visual Analyzer (`http://www.sillanumsoft.org`).

LXIV Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

3 października 2012 r. – I seria,
5 listopada 2012 r. – II seria,
6 grudnia 2012 r. – III seria

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: `www.om.edu.pl`

Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

I seria

(3 września 2012 r. – – 3 października 2012 r.)

1. Dane są różne dodatnie liczby wymierne x i y, dla których liczba

$$w = \frac{x+\sqrt{y}}{y+\sqrt{x}}$$

jest wymierna. Wykazać, że obie liczby x i y są kwadratami liczb wymiernych.

2. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Zakładamy, że okrąg opisany na trójkącie ABD przecina boki CB i CD odpowiednio w punktach K i L różnych od wierzchołków. Niech odcinek AN będzie średnicą tego okręgu. Udowodnić, że punkt N jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CKL.

3. Niech n będzie dodatnią liczbą całkowitą. Wykazać, że jeżeli suma wszystkich jej dodatnich dzielników jest nieparzysta, to liczba n jest kwadratem lub podwojonym kwadratem liczby całkowitej.

4. Na tablicy narysowany jest 2012-kąt foremny. Michał i Jurek dorysowują na zmianę jedną przekątną, niemającą wspólnych punktów wewnętrznych ani wspólnych końców z wcześniej narysowanymi przekątnymi. Przegrywa ten z graczy, który nie może wykonać ruchu. Grę rozpoczyna Michał. Który z graczy ma strategię wygrywającą?

II seria

(4 października 2012 r. – – 5 listopada 2012 r.)

5. Wyznaczyć najmniejszą wartość wyrażenia $|20^m - 9^n|$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi.

6. Punkty P, Q i R leżą odpowiednio na bokach BC, CA i AB trójkąta ABC, przy czym spełnione są równości $AR = RP = PC$ oraz $BR = RQ = QC$. Wykazać, że $AC + BC = 2AB$.

7. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAD$, a sfera o środku S, dopisana do tego czworościanu, jest styczna do ściany ABC w środku okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że proste AD i AS są prostopadłe.

(*Uwaga*: Sfera dopisana do czworościanu to sfera styczna do dokładnie jednej ściany oraz do trzech płaszczyzn zawierających pozostałe ściany.)

8. Na planszy o wymiarach $n \times n$ wyróżniono $2n-1$ pól. Dowieść, że można pomalować pewną niezerową liczbę wyróżnionych pól na zielono w taki sposób, że:

• w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest parzysta,
albo
• w każdym wierszu i w każdej kolumnie liczba zielonych pól jest nieparzysta.

III seria

(6 listopada 2012 r. – – 6 grudnia 2012 r.)

9. Na płaszczyźnie ustawiono po jednym kamieniu w punktach o współrzędnych $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ i $(1,1)$. W jednym ruchu wybieramy dowolny kamień i przestawiamy go symetrycznie względem któregoś z pozostałych kamieni. Rozstrzygnąć, czy po skończonej liczbie ruchów trzy kamienie mogą znaleźć się na jednej prostej.

10. Dany jest prostopadłościan $ABCDA'B'C'D'$. Niech α, β i γ będą kątami utworzonymi przez przekątną AC' z krawędziami AB, AD i AA'. Udowodnić, że

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \leqslant \tfrac{3}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

11. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych A i C przecinają się w punkcie P, a proste zawierające dwusieczne kątów wewnętrznych B i D przecinają się w punkcie Q. Dowieść, że jeżeli kąt PAQ jest prosty, to również kąt PCQ jest prosty.

12. Zbadać, czy istnieje liczba całkowita większa od 2012^{2012}, której nie można przedstawić w postaci $x^2 + y^3 + z^6$, gdzie x, y i z są dodatnimi liczbami całkowitymi.

VIII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

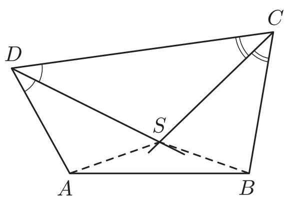
Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego – część korespondencyjna

1 września – 29 października 2012 r.

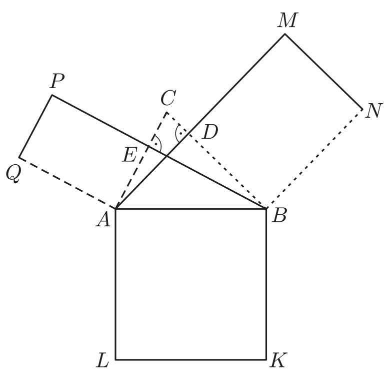
Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, **numer PESEL**, adres domowy, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 29 października 2012 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem `www.omg.edu.pl`.



Zadanie 2



Zadanie 5

1. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby całkowitej n, liczby

$$n, n^5, n^9, n^{13}, n^{17}, \ldots$$

mają jednakowe cyfry jedności.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym $AD + BC = CD$. Dwusieczne kątów BCD i CDA przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że $AS = BS$.

3. Liczba naturalna n jest co najmniej trzycyfrowa. Jeżeli pomiędzy cyfrę setek a cyfrę dziesiątek tej liczby wpiszemy znak mnożenia, to po wykonaniu mnożenia otrzymamy połowę liczby n. Wyznacz wszystkie liczby n o tej własności.

4. W balu wzięło udział 102 królewiczów i 103 królewny. Po balu okazało się, że każdy królewicz zatańczył z taką samą liczbą królewien. Udowodnij, że pewne dwie królewny zatańczyły z taką samą liczbą królewiczów.

5. Odcinki AD i BE są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABC. Po zewnętrznej stronie trójkąta ABC zbudowano kwadrat $ABKL$ oraz prostokąty $BDMN$ i $AEPQ$, przy czym $BN = BC$ oraz $AQ = AC$. Udowodnij, że suma pól prostokątów $BDMN$ i $AEPQ$ jest równa polu kwadratu $ABKL$.

6. W ostrosłup $SABCD$, którego podstawą jest czworokąt wypukły $ABCD$, można wpisać sferę. Udowodnij, że

$$\sphericalangle ASB + \sphericalangle CSD = \sphericalangle BSC + \sphericalangle DSA.$$

7. Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n, dla których liczba $n^3 - 7n$ jest kwadratem liczby całkowitej.