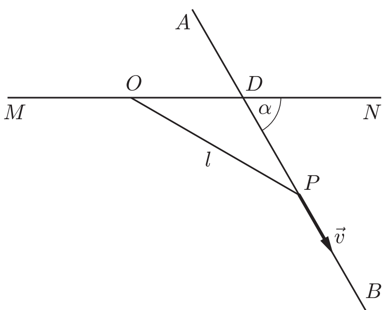
Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2012

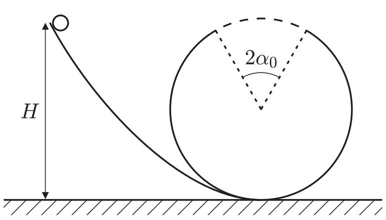
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 534 ($WT = 1{,}33$) i 535 ($WT = 2{,}17$) z numeru 3/2012

Michał Koźlik	Gliwice	46,00
Marian Łupieżowiec	Gliwice	44,02
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	38,04

Dwaj gliwiczanie przekroczyli 44 punkty (po raz drugi i pierwszy).



Rys. 1



Rys. 2

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z fizyki nr 542, 543

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

542. Statek i kuter płyną po liniach prostych z prędkościami odpowiednio $v_1 = 15$ mil/h i $v_2 = 26$ mil/h. W chwili początkowej kuter znajduje się w odległości 6 mil na południe od rufy statku. W chwili końcowej kuter przecina tor statku 3 mile za nim i znajduje się wtedy najbliżej statku. Ile czasu upływa między tymi chwilami? Wyznacz kurs statku (kąt między kierunkiem południe-północ a wektorem prędkości statku).

543. Pies P biegnie ze stałą prędkością v po prostej AB, która tworzy kąt $\alpha = \pi/3$ z poziomo rozciągniętym drutem MN (rys. 1). Do obroży psa przymocowana jest lekka pozioma linka o długości l. Linka połączona jest z pierścieniem O o masie m, który może ślizgać się po drucie bez tarcia. Znaleźć naprężenie linki w chwili, gdy pies i pierścień znajdują się w jednakowych odległościach od punktu przecięcia D prostej AB i drutu.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2012

Przypominamy treść zadań:

538. Małe ciało porusza się po torze z „martwą pętlą”, której na górze brakuje łuku $2\alpha_0$ (rys. 2). Z jakiej wysokości H powinno wystartować ciało, żeby oderwawszy się na początku wyrwy nie wypaść poza nią?

539. Długa cylindryczna cewka nakręcona na rdzeń o średnicy D_1 ma indukcyjność L_1. Po podłączeniu cewki do źródła prądu wewnątrz niej zostało wyindukowane pole magnetyczne o indukcji B_1. Następnie cewka została nakręcona na inny rdzeń o średnicy D_2. Indukcyjność cewki była wtedy równa L_2. Wyznaczyć indukcję pola magnetycznego B_2 wewnątrz nowej cewki po podłączeniu do tego samego źródła prądu. Założyć, że przewodnik, z którego jest zrobiona cewka, jest dużo dłuższy niż długość cewki.

538. Ciało nie odpadnie od pętli, jeżeli składowa siły grawitacji prostopadła do toru nie przekracza wartości siły odśrodkowej. Stąd otrzymujemy warunek

$$mg\cos\alpha \leqslant m\frac{v^2}{R}$$

dla $\alpha_0 \leqslant \alpha < \pi/2$ i stwierdzamy, że $v_0^2 \geqslant gR\cos\alpha_0$, gdzie v_0 jest prędkością ciała w najwyższym punkcie pętli. Ponadto zasięg rzutu ukośnego ciała wylatującego z pętli nie powinien być większy niż długość przerwy w pętli (mierzona w poziomie). Otrzymujemy stąd warunek

$$\frac{2v_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g} \leqslant 2R\sin\alpha_0,$$

czyli $v_0^2 \leqslant gR/\cos\alpha_0$. Wartość v_0^2 musi zatem leżeć w przedziale $(gR\cos\alpha_0, gR/\cos\alpha_0)$; możemy ją znaleźć z zasady zachowania energii:

$$gH = \frac{1}{2}v_0^2 + gR(1+\cos\alpha_0).$$

Stąd

$$\frac{1}{2}\cos\alpha_0 \leqslant \frac{H}{R} + 1 + \cos\alpha_0 \leqslant \frac{1}{2\cos\alpha_0}.$$

539. Pola powierzchni przekroju poprzecznego starej i nowej cewki są równe $S_1 = \pi D_1^2/4$, $S_2 = \pi D_2^2/4$. Strumień pola magnetycznego przechodzącego przez cewkę to $\Phi = LI = BSN$. Stąd $B = LI/(SN)$. Zatem

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{L_2}{L_1}\frac{S_1N_1}{S_2N_2}\frac{I_2}{I_1}.$$

Ale ponieważ $I_1 = I_2$, więc $N_1/N_2 = D_2/D_1$ i

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{S_1D_2L_2}{S_2D_1L_1} = \frac{L_2D_1}{L_1D_2}.$$

Ostatecznie $B_2 = B_1L_2D_1/(L_1D_2)$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 633 ($WT = 2{,}10$) i 634 ($WT = 1{,}33$) z numeru 1/2012

Tomasz Tkocz	Rybnik	42,75
Roksana Słowik	Knurów	40,04
Zbigniew Skalik	Wrocław	38,93
Michał Miodek	Zawiercie	37,56
Adam Dzedzej	Gdańsk	36,77
Tomasz Wietecha	Tarnów	33,02

Zadania z matematyki nr 645, 646

Redaguje Marcin E. KUCZMA

645. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Boki BC i CD mają jednakową długość. Na przedłużeniu odcinka AB odkładamy odcinek BE długości $|BE| = |AD|$. Dowieść, że $|AC| = |CE|$.

646. Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną na zbiorze liczb dodatnich, dwukrotnie różniczkowalną, spełniającą warunek $f''(x) > \dfrac{1}{1+x^2}$ dla $x > 0$. Czy taka funkcja może mieć asymptotę przy $x \to \infty$?

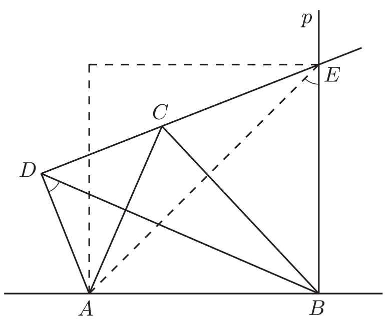
Zadanie 646 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2012

Przypominamy treść zadań:

641. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B. Rozważamy wszystkie czworokąty wypukłe $ABCD$, położone w ustalonej półpłaszczyźnie o krawędzi AB, symetryczne względem prostej BD, z kątem prostym przy wierzchołku D. Wykazać, że istnieje punkt wspólny wszystkich uzyskanych prostych CD.

642. Dana jest liczba naturalna nieparzysta n. Ala i Bartek grają w grę, wykonując ruchy na przemian. Stan gry jest liczbą całkowitą i zmienia swą wartość w trakcie gry. Gracz, do którego należy ruch, może do tej liczby zastosować jedną z dwóch operacji: odjąć od niej dowolną dodatnią liczbę całkowitą, mniejszą niż n, albo podzielić ją przez n i zaokrąglić wynik do najbliższej liczby całkowitej (wobec nieparzystości n, kierunek zaokrąglenia jest zawsze dobrze określony). Powstała nowa wartość przechodzi do dyspozycji przeciwnika. Wygrywa, kto pierwszy uzyska wartość 0. Rozpoczyna Ala, startując od liczby n^n. Kto ma strategię wygrywającą?



641. Z punktu B prowadzimy półprostą p, prostopadłą do AB, położoną w rozpatrywanej półpłaszczyźnie. Niech $ABCD$ będzie jednym z rozważanych czworokątów. Trójkąt ADC jest prostokątny, równoramienny. Stąd (i z wypukłości czworokąta $ABCD$) wynika, że punkt D leży po tej stronie p, co punkt A. Półprosta $DC^{\to}$ przecina więc p w pewnym punkcie E, tworząc czworokąt wypukły $ABED$. Ma on kąty proste przy wierzchołkach B i D; można na nim opisać okrąg. Zatem $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB| = 45^\circ$ (ostatnia równość zachodzi, bo BD jest symetralną odcinka AC). Stąd wniosek, że E jest wierzchołkiem kwadratu, którego jednym bokiem jest odcinek AB. Jest to szukany punkt wspólny wszystkich możliwych prostych CD.

642. Każdy ruch zmniejsza wartość przekazywanej liczby. Gra się zatem zawsze kończy, a któryś z graczy ma strategię wygrywającą. Dodatnią liczbę całkowitą nazwijmy *zieloną*, jeśli – startując od tej liczby – gracz rozpoczynający ma strategię zwycięską; nazwijmy ją *czerwoną*, gdy strategię zwycięską ma jego przeciwnik; również liczbę 0 będziemy uważać za czerwoną. Wykażemy, że liczba n^n jest zielona; a więc (jak zwykle w tego typu zadaniach) wygrywa dziewczyna.

Rozbicie zbioru liczb całkowitych nieujemnych na liczby zielone i czerwone jest scharakteryzowane przez własności:

(1) od każdej liczby zielonej można przejść jednym ruchem do czerwonej;
(2) od każdej liczby czerwonej wszystkie ruchy prowadzą do liczb zielonych.

Wśród liczb mniejszych od n^2 liczbami czerwonymi są wielokrotności liczby n, i tylko one; sprawdzenie własności (1), (2) jest natychmiastowe. Sama liczba n^2 jest wszelako zielona (dzielenie przez n prowadzi do czerwonej liczby n). Liczby z przedziału $\left(n^2; n^2 + \frac{n}{2}\right)$ też są zielone (dzielenie z zaokrągleniem prowadzi do n). Zajmiemy się teraz liczbami większymi.

Przyjmijmy $n = 2k - 1$, czyli $k = \lceil n/2 \rceil$. Weźmy pod uwagę zbiór

$$Z = \{x \in \mathbb{N} : x > n^2 - n,\ x \not\equiv k \pmod{n}\}.$$

Udowodnimy, że wszystkie liczby w zbiorze Z są zielone.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Niech c będzie najmniejszą liczbą czerwoną w zbiorze Z. Wiemy już, że zielone są wszystkie liczby od $n^2 - n + 1$ do $n^2 + k - 1$; tak więc $c > n^2 + k$. Niech b będzie największą liczbą spełniającą warunki $b < c$, $b \equiv k \pmod{n}$; zatem $b \geqslant n^2 + k$. Jest ona osiągalna z liczby c ruchem odejmowania.

Dzielenie przez n z zaokrągleniem, zastosowane do każdej z liczb b, c, daje w wyniku tę samą liczbę a; konkretnie: liczbę $a = (b + k - 1)/n$. Liczba c jest czerwona, więc w myśl własności (2) liczby b i a (osiągalne z c) są zielone. W myśl własności (1), istnieje ruch, prowadzący od liczby b do jakiejś liczby czerwonej. Nie jest to dzielenie z zaokrągleniem (które daje liczbę a); zaś odejmowanie od b liczb $1, \ldots, n-1$ nie wyprowadza ze zbioru Z (skoro $b \geqslant n^2 + k$ oraz $b \equiv k$). Którąś z tak uzyskanych różnic powinna być liczbą czerwoną – wbrew określeniu c jako najmniejszej liczby czerwonej w zbiorze Z.

Sprzeczność dowodzi, że istotnie cały zbiór Z jest zielony. Oczywiście $n^n \in Z$. Ala wygrywa.

Uwaga. Niektóre liczby zielone ($> n^2$) są także poza zbiorem Z (na przykład liczba $2n^2 - n + k$ jest zielona). Można wykazać, że oprócz liczby 0, czerwone są liczby następujących dwóch postaci, i tylko one:

$$an^{2j+1} - \frac{n^{2j} - 1}{2}, \qquad j \geqslant 0,\ 0 < a < n;$$

$$bn^{2j+1} - \frac{n^{2j+1} - 1}{2}, \qquad j \geqslant 0,\ [n < b < n^2,\ b \not\equiv 0] \text{ lub } [b \geqslant n^2,\ b \not\equiv k].$$

Sprawdzenie własności (1), (2) wymaga uciążliwego rozpatrywania wielu przypadków.