



Normalna-nienormalna?

Numer poświęcony paradoksom nie byłby kompletny, gdyby nie pojawiła się w nim paradoksalna gra. Przyjrzyjmy się zatem pewnej grze, inspirowanej paradoksami teoriomnogościowymi, które rozkwitły w początkach XX wieku.

Będziemy rozważać gry dwuosobowe, w których gracze wykonują ruchy na przemian. Są gry, które za każdym razem kończą się po skończonej liczbie ruchów – i te gry nazwiemy *normalnymi*. Taką grą są, na przykład, warcaby. Można sobie jednak wyobrazić także i takie gry, w które w pewnych sytuacjach można grać w nieskończoność, na przykład, gdy każdy gracz podaje w swoim ruchu liczbę naturalną i przegrywa ten, który już nie może podać liczby większej od ostatniej liczby przeciwnika.

Oto reguły gry, którą nazwiemy *uniwersalną*:

1. Gracz, który rozpoczyna grę, wybiera grę normalną.
2. Drugi gracz wykonuje pierwszy ruch w wybranej grze normalnej.
3. Dalej gracze wykonują naprzemiennie swoje ruchy zgodnie z regułami wybranej gry.

Czy gra uniwersalna jest normalna? Jeśli tak, to grając w nią, można ją wybrać w pierwszym ruchu. Wtedy drugi gracz musi wykonać pierwszy ruch wybranej gry (czyli gry uniwersalnej), a ten ruch polega na wybraniu gry normalnej; wybiera więc... grę uniwersalną. Wtedy na pierwszego gracza spada obowiązek wykonania pierwszego ruchu tej gry, więc – a jakże! – wybiera grę uniwersalną. I tak w nieskończoność, co jawnie pokazuje, że gra uniwersalna nie jest normalna. Ale jeśli nie jest normalna, to nie można jej wybrać w pierwszym ruchu gry uniwersalnej; trzeba wybrać grę „naprawdę” normalną, a ta skończy się po skończeniu wielu ruchach. Zatem gra uniwersalna jest normalna!

Normalność, jak widać, niewiele różni się od nienormalności...

W. B.



Zadania

Przygotował Piotr ZALEWSKI

F 817. W wiadrze pływa cylindryczny soplek (obciążony tak, by był ustawiony pionowo). Do rączki wiadra przymocowany jest ciężarek na nieważkiej, spełniającej prawo Hooke'a sprężynie. Wiadro wisi na linie (patrz rys. 1). Soplek i ciężarek mają tę samą masę m i drgają z tą samą częstością kołową ω . Jak zmieniają się parametry ich ruchu, jeżeli wiadro zaczyna spadać ze stałym przyspieszeniem mniejszym od przyspieszenia ziemskiego g ? Opory ruchu należy zaniedbać.

Rozwiązanie na str. 1

F 818. Co się stanie, jeżeli przed rozpoczęciem spadania soplek i ciężarek będą nieruchome?

Rozwiązanie na str. 8

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1357. Na bokach BC , CA i AB trójkąta ABC (rys. 2) dane są odpowiednio punkty D , E i F , takie że

$$\frac{BD}{DC} \leq \frac{BF}{FA} \leq \frac{CE}{EA}.$$

Udowodnić, że

$$[DEF] \leq \frac{1}{4}[ABC]$$

(gdzie $[F]$ oznacza pole figury F). Kiedy zachodzi równość?

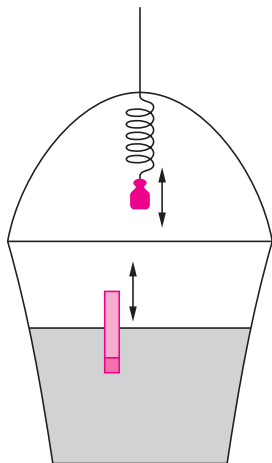
Rozwiązanie na str. 9

M 1358. Dana jest rodzina \mathcal{F} skończonych podzbiorów zbioru liczb całkowitych dodatnich, taka że dowolne dwa różne zbiory tej rodziny mają wspólny element. Czy istnieje taki skończony podzbiór S zbioru liczb całkowitych dodatnich, że dla dowolnych $A, B \in \mathcal{F}$ jest $A \cap B \cap S \neq \emptyset$?

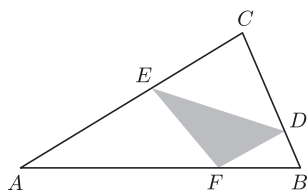
Rozwiązanie na str. 7

M 1359. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na biało lub czarno. Rozstrzygnąć, czy istnieje niezdegenerowany do punktu odcinek jednokolorowy.

Rozwiązanie na str. 3



Rys. 1



Rys. 2