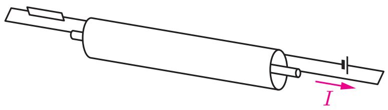
Ukryty pęd

Krzysztof TURZYŃSKI

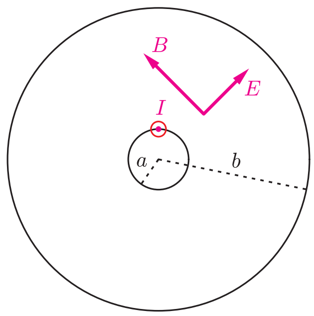


Rys. 1. Schemat rozważanego układu przewodzących walców.

Przy omawianiu elektryczności i magnetyzmu w uniwersyteckim kursie fizyki definiuje się wielkość zwaną wektorem Poyntinga:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \tag{1}$$

którą interpretuje się np. jako gęstość pędu pola elektromagnetycznego mnożoną przez czynnik c^2, gdzie c jest prędkością światła w próżni. Oznacza to, że pęd niesiony przez pole w ustalonym fragmencie przestrzeni można obliczyć, całkując $\frac{1}{c^2}\mathbf{S}$ po tym właśnie fragmencie. Jak się zaraz przekonamy, prowadzi to do zastanawiających wyników.



Rys. 2. Przekrój poprzeczny przez rozważany układ przewodzących walców.

Rozważmy dwa długie, przewodzące, koncentryczne walce o promieniach a i b, przy czym $a < b$; walec wewnętrzny naładowany jest liniową gęstością ładunku λ, a zewnętrzny liniową gęstością $-\lambda$, przez oba walce płynie prąd elektryczny o natężeniu I. Układ taki przedstawiony jest schematycznie na rysunku 1. Zgodnie z prawem Gaussa, pomiędzy walcami występuje pole elektryczne o natężeniu $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$ skierowane na zewnątrz osi walców oraz, zgodnie z prawem Ampère'a, pole magnetyczne o indukcji $B = \frac{I}{2\pi r}$, prostopadłe zarówno do pola elektrycznego, jak i do osi walców (rys. 2); wewnątrz mniejszego walca oraz na zewnątrz większego pola są równe zeru. Wykorzystując wzór (1), nietrudno znaleźć pęd pola elektromagnetycznego w omawianym układzie – jest on równy

$$p_{\mathrm{em}} = \frac{\lambda I \ell}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\frac{b}{a},$$

gdzie ℓ jest długością walców, i skierowany wzdłuż osi walców. Kierunek i zwrot tego pędu pokrywa się z kierunkiem przepływu prądu w wewnętrznym walcu.

Dla uproszczenia tego rachunku zakładamy przybliżenie nieskończenie długich walców.

Tu pojawia się pewien problem. Jeśli układ walców spoczywa, to jego pęd jest równy zeru. Jak widzimy, pęd pola elektromagnetycznego jest różny od zera, a zatem w układzie powinno być „coś", czego pęd ma taką samą długość i kierunek, a przeciwny zwrot. Czyli co?

Rozszyfrowanie tej zagadki wymaga zastanowienia się, jaka jest mikroskopowa natura źródeł pola elektrycznego i magnetycznego – czyli prądu elektrycznego i gęstości ładunku na walcach. Wyobraźmy sobie (perwersyjnie), że prąd polega na przepływie elementarnych ładunków dodatnich q, których liczba w wewnętrznej i zewnętrznej części kabla to odpowiednio N_{w+} oraz N_{z+}, a niezerowa gęstość ładunku zapewniana jest przez obecność odpowiedniej liczby nieruchomych ładunków ujemnych $-Q$. Ładunki q poruszają się z prędkościami odpowiednio v_w i v_z, zatem:

Oczywiście, założenie, że w przewodniku poruszają się ładunki ujemne doprowadzi do tego samego wyniku, w rachunkach trzeba jednak będzie bardziej uważnie przyglądać się znakom + i −.

$$I = \frac{N_{w+} q v_w}{\ell} = \frac{N_{z+} q v_z}{\ell}. \tag{2}$$

Przy przejściu z wewnętrznej części przewodu na zewnętrzną energia ładunku q zmienia się z $\mathcal{E}_w$ na $\mathcal{E}_z$, które są związane zależnością:

$$\mathcal{E}_z = \mathcal{E}_w + Vq, \tag{3}$$

gdzie V jest różnicą potencjałów elektrostatycznych zewnętrznego i wewnętrznego walca. Zgodnie ze szczególną teorią względności energia ciała o masie spoczynkowej m i prędkości v w inercjalnym układzie odniesienia wynosi $\mathcal{E} = m\gamma c^2$, gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, a pęd tego ciała to $p = m\gamma v$. Uzbrojeni w tę wiedzę możemy obliczyć wypadkowy pęd ładunków krążących w obwodzie (znak + oznacza ruch zgodny z kierunkiem prądu):

Wynik nierelatywistyczny otrzymamy, kładąc $\gamma = 1$ w definicji pędu; wówczas, oczywiście, wyrażenie dane równaniem (4) jest równe zeru.

$$p_q = -N_{z+} m\gamma_z v_z + N_{w+} m\gamma_w v_w = -\frac{I\ell}{q} m(\gamma_z - \gamma_w) = -\frac{I\ell V}{c^2}, \tag{4}$$

przy czym w obliczeniach skorzystaliśmy najpierw z (2), a następnie z (3). Ponieważ w opisanym układzie $V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, otrzymujemy:

$$p_q = -\frac{\mu_0 I \lambda \ell}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = -p_{\mathrm{em}}.$$

Suma pędu pola elektromagnetycznego oraz tzw. pędu ukrytego, czyli sumy pędów ładunków składających się na prąd elektryczny, jest zatem równa zeru!

Na pierwszy rzut oka może wydać się nieco dziwne, że do wyjaśnienia, dlaczego niezbyt skomplikowany układ przewodników z prądem może spoczywać, musieliśmy odwołać się do szczególnej teorii względności. Zaskoczenie nie powinno jednak trwać długo – przecież teoria ta została sformułowana przez Einsteina właśnie w celu podania praw ruchu zgodnych z prawami elektryczności i magnetyzmu.