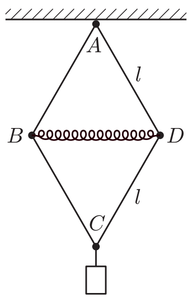
Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 532 ($WT = 3{,}55$) i 533 ($WT = 2{,}50$) z numeru 2/2012

Jacek Piotrowski	Rzeszów	44,06
Michał Koźlik	Gliwice	42,72
Marian Łupieżowiec	Gliwice	41,85
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	36,71
Krzysztof Magiera	Łosiów	22,60

Pan Piotrowski zdobył 44 punkty po raz drugi.

Rozwiązania zadań z numeru 4/2012

Redaguje Ewa CZUCHRY

Przypominamy treść zadań:

536. Na pionowej, obracającej się ze stałą prędkością ω osi zamocowany jest poziomo sztywny, nieważki pręt. Wzdłuż niego mogą poruszać się bez tarcia dwie kuleczki, każda o masie m, połączone sprężyną o stałej sprężystości k – obie leżą po tej samej stronie osi obrotu. Taka sama sprężyna łączy kulkę bliższą osi z punktem zamocowania osi i pręta. Nierozciągnięte sprężyny mają długość l_0 każda. Znaleźć długości obu sprężyn podczas ruchu. Dla jakich parametrów uzyskane rozwiązanie ma sens fizyczny?

537. Cztery nieważkie pręty o długości l, połączone przegubami w romb, zostały za przegub A podwieszone na suficie (rys. 1). Przeciwległy przegub C obciążono ciężarkiem N, a pozostałe przeguby B i D rozparto sprężyną o długości $\frac{3}{2}l$ i stałej sprężystości k. W położeniu równowagi okazało się, że pręty są nachylone do pionu pod kątem $\alpha = 30°$. Znaleźć okres małych drgań ciężarka.

536. Oznaczmy przez l_1 i l_2 szukane długości sprężyn. Dla kulek poruszających się ruchem harmonicznym o częstości ω spełnione są równania:

$$m\omega^2 l_1 = k(l_1 - l_0) - k(l_2 - l_0), \qquad m\omega^2(l_1 + l_2) = k(l_2 - l_0).$$

Stąd wyznaczamy:

$$l_1 = \frac{l_0}{1 - 3\beta + \beta^2}, \qquad l_2 = l_1(1-\beta),$$

gdzie $\beta = \frac{m\omega^2}{k} > 0$. Rozwiązanie to ma sens fizyczny, gdy obliczone wartości l_1 i l_2 są dodatnie, czyli

$$1 - 3\beta + \beta^2 > 0, \qquad 1 - \beta \geqslant 0.$$

Z drugiego warunku wynika $\beta \leqslant 1$, a z drugiego $\beta > \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \approx 2{,}6$ lub $\beta < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$. Ostatecznie otrzymujemy $0 < \beta < \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$, czyli

$$\omega < \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m}}.$$

537. Dla dowolnego odchylenia prętów od pionu o kąt $\tilde{\alpha}$ pręty działają na ciężarek siłą $F_1 = 2N\cos\tilde{\alpha}$, a na sprężynę siłą $F_2 = 2N\sin\tilde{\alpha}$. Z prawa Hooke'a mamy $F_2 = \left(\frac{3}{2}l - 2l\sin\tilde{\alpha}\right)k$, gdzie k jest stałą sprężyny. Zatem $F_1 = \frac{3}{2}kl/\operatorname{tg}\tilde{\alpha} - 2kl\cos\tilde{\alpha}$. Przy małej zmianie wysokości Δh ciężarka wokół położenia równowagi $h_0 = 2l\cos\alpha$, siła nań działająca zmienia się o

$$\Delta F = \frac{3}{2}kl\Delta(1/\operatorname{tg}\tilde{\alpha}) - 2lk\Delta(\cos\tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha},$$

gdzie $\Delta(1/\operatorname{tg}\tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha} = \frac{\mathrm{d}(1/\operatorname{tg}\tilde{\alpha})}{\mathrm{d}\tilde{\alpha}}|_{\tilde{\alpha}=\alpha}\Delta\alpha = -\Delta\alpha/\sin^2\alpha$ oraz $\Delta(\cos\tilde{\alpha})|_{\tilde{\alpha}=\alpha} = -\sin\alpha\Delta\alpha$. Z drugiej strony $\Delta h = -2l\sin\alpha\Delta\alpha$, zatem

$$\Delta F = -5kl\Delta\alpha = -5k\Delta h,$$

przy czym uwzględniliśmy to, że $\alpha = 30°$. Zatem okres małych drgań wynosi $T = 2\pi\sqrt{m/5k}$. Masę m znajdujemy z warunku równowagi:

$$\frac{3}{2}\frac{kl}{\operatorname{tg}\alpha} - 2kl\cos\alpha = mg.$$

Stąd $m = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{kl}{g}$. Ostatecznie, szukany okres drgań ciężarka wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\sqrt{3}l}{10g}}.$$

Klub 44

Rozwiązania zadań z numeru 4/2012

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

639. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta CI przecina bok AB w punkcie D. Prowadzimy przez punkt D dowolną prostą, przecinającą okrąg opisany na trójkącie IAB w punktach P i Q. Wykazać, że prosta CI jest dwusieczną kąta PCQ.

640. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ spełnia warunek

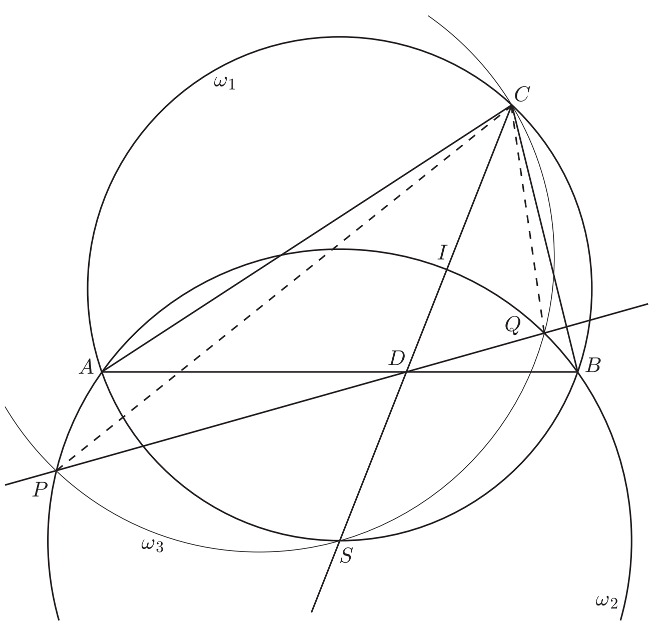
$$\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_na_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3 \ldots$$

Dowieść, że spełnia on również liniową zależność rekurencyjną

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3 \ldots$$

Wyznaczyć wszystkie pary współczynników (A, B) oraz wszystkie pary wyrazów początkowych (a_1, a_2), dla których ta rekurencja liniowa generuje ciąg (a_n), spełniający zadany na wstępie warunek.

639. Niech ω_1 i ω_2 będą (odpowiednio) okręgami opisanymi na trójkątach ABC i IAB. Dwusieczna CD kąta BCA, a raczej jej przedłużenie, przecina okrąg ω_1 w środku łuku AB. Oznaczmy ten punkt przez S. Zachodzi równość $|SA| = |SI| = |SB|$ (znana, a przy tym łatwa do wykazania). Punkt S jest więc środkiem okręgu ω_2. Zatem $|SP| = |SQ|$.



W punkcie D przecinają się cięciwy AB i CS okręgu ω_1, a także cięciwy AB i PQ okręgu ω_2. Tak więc

$$|CD| \cdot |DS| = |AD| \cdot |DB| = |PD| \cdot |DQ|.$$

Równość między skrajnymi iloczynami z kolei dowodzi, że istnieje okrąg ω_3, przechodzący przez punkty C, S, P, Q. Jego cięciwy SP i SQ mają jednakową długość, więc wyznaczają przystające łuki SP, SQ. Oparte na nich kąty PCS i QCS (wpisane w okrąg ω_3) są równe – a to jest teza zadania.

640. Niech L_n oznacza sumę po lewej stronie zależności, podanej na początku zadania, zaś P_n – ułamek po prawej stronie. Dla $n = 1$ mamy $P_1/L_1 = a_1^2$, zatem równość $L_1 = P_1$ wymusza wartość $a_1 = 1$. Dalej,

$$L_{n+1} - L_n = \frac{(-1)^n}{a_{n+1}a_{n+2}}, \qquad P_{n+1} - P_n = \frac{a_{n+1}^2 - a_na_{n+2}}{a_{n+1}a_{n+2}}.$$

Widać więc, że podana zależność jest spełniona dla wszystkich $n \geqslant 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1) \qquad a_1 = 1 \quad \text{oraz} \quad a_{n+1}^2 - a_na_{n+2} = (-1)^n \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Jeżeli ciąg (a_n), spełniający ten warunek, miałby również spełniać rekurencję typu

$$(2) \qquad a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$$

(z $a_1 = 1$), to dla $n = 1, 2$ mielibyśmy

$$\begin{cases} a_3 = Aa_2 + B \\ a_4 = Aa_3 + Ba_2 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} a_2^2 - a_3 = -1 \\ a_3^2 - a_2a_4 = 1. \end{cases}$$

Pierwsza para równości to układ równań liniowych (z niewiadomymi A, B) o wyznaczniku $a_2^2 - a_3 = -1 \neq 0$, więc mający dokładnie jedno rozwiązanie. Przy tym jest on spełniony dla $A = a_2$, $B = 1$ (co łatwo stwierdzić, korzystając z drugiej pary równości). Stąd wniosek, że *jedynym* kandydatem na postulowaną zależność rekurencyjną jest równanie

$$(3) \qquad a_{n+2} = a_2a_{n+1} + a_n \qquad \text{dla } n \geqslant 1,$$

z warunkiem początkowym $a_1 = 1$. Wprowadźmy oznaczenia:

$$D_n = a_{n+1}^2 - a_na_{n+2}, \qquad R_n = a_{n+2} - (a_2a_{n+1} + a_n)$$

i zauważmy, że (dla $n \geqslant 2$)

$$a_{n+1}R_{n-1} = a_{n+1}^2 - a_{n+1}(a_2a_n + a_{n-1}),$$
$$a_nR_n = a_na_{n+2} - a_n(a_2a_{n+1} + a_n),$$

skąd przez odjęcie stronami

$$(4) \qquad a_{n+1}R_{n-1} - a_nR_n = D_n + D_{n-1}.$$

Ponadto (wobec $a_1 = 1$) mamy: $D_1 + R_1 = -1$.

Wnioski: Jeżeli ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n) spełnia wyjściową zależność, czyli warunki (1), to dla wszystkich n mamy $D_n = (-1)^n$, więc prawa strona (4) ma stale wartość 0; przy tym $R_1 = -D_1 - 1 = 0$ i ze wzoru (4) wynika, że $R_n = 0$ dla wszystkich n – mamy zależność (3).

Na odwrót, jeśli równanie (3) (z wyrazem początkowym $a_1 = 1$ oraz dowolnym a_2) jest dla wszystkich n spełnione, czyli wszystkie R_n są zerami, to wobec (4): $D_n = -D_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$; przy tym $D_1 = -R_1 - 1 = -1$, zatem $D_n = (-1)^n$ – a to jest zależność (1).

Ostatecznie więc, zadana na wstępie zależność jest równoważna rekurencji liniowej (2) z parametrami $B = a_1 = 1$, $A = a_2$ – dowolna liczba naturalna.