Eubulides, Richard, Gödel

Wiktor BARTOL

Gdy w połowie XIX wieku odkryto geometrie nieeuklidesowe, zainteresowanie matematyków zaczęło zwracać się w stronę podstaw matematyki. Na jakich podstawach można lub należy oprzeć matematykę? Na tym tle zrodził się w latach 20. XX wieku tzw. program Hilberta, postulujący zbudowanie sformalizowanej matematyki na fundamencie aksjomatycznym i wyprowadzanie z aksjomatów twierdzeń jedynie za pomocą ściśle określonych reguł. Tak zbudowana teoria powinna być zupełna i niesprzeczna i te jej własności powinny dać się udowodnić.

Teoria formalna jest zupełna, gdy każde zdanie prawdziwe w dowolnym jej modelu jest jej twierdzeniem, a więc istnieje dla niego dowód wychodzący od aksjomatów. Równoważnie, gdy dla każdego zdania Z jest tak, że albo Z, albo negacja Z jest w tej teorii. Z kolei teoria jest niesprzeczna, gdy istnieje co najmniej jedno zdanie w jej języku, które jej twierdzeniem nie jest. Mówiąc inaczej, niesprzeczność oznacza, że nie istnieje takie zdanie Z, że i Z, i negacja Z są twierdzeniami teorii.

Próbę takiej konstrukcji matematyki podjęli Brytyjczycy: Bertrand Russell i Alfred North Whitehead w publikowanym w latach 1910–1913 (choć niedokończonym) dziele *Principia Mathematica*. Kilkanaście lat później, w 1931 roku, ukazała się praca Kurta Friedricha Gödla *Über formal unenstcheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* (O formalnie nierozstrzygalnych zdaniach *Principia Mathematica* i podobnych systemów). Gödel wykazał w niej, że program Hilberta nie może zostać zrealizowany: dla każdej niesprzecznej teorii matematycznej, zawierającej arytmetykę, istnieje zdanie G, takie że ani G, ani negacja G nie jest twierdzeniem tej teorii. Innymi słowy, jeśli teoria jest niesprzeczna, to nie jest zupełna.

Dwa inspirujące paradoksy. Czytelnik zapewne zetknął się ze słynnym *paradoksem kłamcy*, sformułowanym mniej więcej 2400 lat temu przez Eubulidesa: czy zdanie „To zdanie, które teraz wypowiadam, jest fałszywe” jest prawdziwe czy fałszywe? Każda próba analizy prowadzi do nieuchronnego wniosku, że prawdziwość tego zdania jest równoważna jego fałszywości.

Paradoks jest zazwyczaj objawem jakiejś luki – nieprecyzyjnej definicji lub nieuprawnionej konstrukcji. Paradoks kłamcy dowodzi konieczności rozróżniania poziomów języka; samo zdanie i zdanie, które o nim mówi, są tym samym, są na tym samym poziomie. Takie zdanie, odnoszące się do siebie, nazywa się *autoreferencyjnym* (*samoorzekającym*).

Wiele lat później, w 1905 roku, francuski matematyk Jules Richard sformułował inny paradoks. Wyobraźmy sobie, że dysponujemy listą wszystkich własności arytmetycznych liczb naturalnych, zapisanych w ustalonym języku naturalnym. Każdy opis własności jest skończonym ciągiem symboli ze skończonego alfabetu, zatem mamy tych własności przeliczalnie wiele, co oznacza, że możemy je ponumerować liczbami naturalnymi. W ten sposób podzieliliśmy liczby naturalne na dwie kategorie. Pierwszą niech stanowią te liczby, które mają tę własność, której są numerem. Na przykład, gdyby własność bycia liczbą parzystą miała numer 12, to 12 byłoby liczbą pierwszej kategorii, gdyż jest parzysta. Drugą kategorię niech stanowią liczby, które nie mają własności, której są numerem. Na przykład, gdyby własność bycia liczbą parzystą miała numer 5, to 5 byłoby liczbą drugiej kategorii – i te liczby nazwijmy liczbami Richarda. Bycie liczbą Richarda jest pewną własnością liczb naturalnych, został jej więc przypisany pewien numer, powiedzmy, k. Czy k jest liczbą Richarda? Odpowiedź „tak” implikuje, że k nie jest liczbą Richarda, podobnie jak odpowiedź „nie” implikuje, że nią jest. Tak więc k jest liczbą Richarda wtedy i tylko wtedy, gdy nią nie jest.

Rozwiązanie zadania F 818.
Spławik pozostanie w spoczynku, ale ciężarek zacznie drgać, bo w zmienionej sytuacji znajdzie się poza położeniem równowagi (zacznie poruszać się w górę względem wiadra).

Pozostawiając na boku kwestię źródeł sprzeczności, odnotujmy, że w obu przypadkach mamy do czynienia ze zdaniem, które w ten czy inny sposób odnosi się samo do siebie. Co więcej, można byłoby zauważyć, że żadnego z nich nie da się ani udowodnić, ani obalić. Zauważmy jednak, że w przypadku paradoksu kłamcy mamy do czynienia z pojęciami prawdziwości i fałszywości niemieszczącymi się w żadnej teorii formalnej, w przypadku zaś paradoksu Richarda – z własnością, która zależy od kolejności, w jakiej numerujemy własności liczb naturalnych, a ta nie jest przecież własnością arytmetyczną, wyrażalną w jakiejkolwiek teorii formalnej.

Paradoksy wykorzystane. Gödel powołuje się w swojej pracy na inspiracje zaczerpnięte z powyższych paradoksów. Zasadnicza koncepcja dowodu polegała na zamianie „prawdziwości" i „fałszywości" na „dowodliwość" i „niedowodliwość". Jak takie pojęcia, ściśle związane z danym systemem formalnym (w tym ze zbiorem aksjomatów, reguł wnioskowania), wyrazić w arytmetyce? Tu Gödel wpadł na pomysł, nazwany później *numeracją Gödla*: każdemu symbolowi (7-elementowego) alfabetu przypisał liczbę nieparzystą od 1 do 13, zmiennym reprezentującym obiekty – liczby pierwsze, poczynając od 17: zmiennej x liczbę 17, zmiennej y liczbę 19 itd. (Zmienne wyższych rzędów reprezentowane były przez potęgi liczb pierwszych). W ten sposób każdy symbol alfabetu i każda zmienna miały swój unikalny numer. Formuła jest skończonym ciągiem takich symboli. Jeśli numerami symboli kolejno występujących w formule są $n_1, n_2, \ldots, n_k$, to formule przyporządkowuje się numer $2^{n_1}3^{n_2}\ldots p_k^{n_k}$, gdzie p_k oznacza k-tą liczbę pierwszą. Podobnie przypisuje się numer każdemu ciągowi formuł (a więc np. dowodom): jeśli numerami formuł są, kolejno, $m_1, m_2, \ldots, m_s$, to numerem ciągu jest $2^{m_1}3^{m_2}\ldots p_s^{m_s}$. Nietrudno zauważyć, że w ten sposób każdy symbol alfabetu, każda zmienna, formuła czy ciąg formuł ma jednoznacznie przypisany numer.

Teraz należy własności systemu formalnego przetłumaczyć na język arytmetyki. Opisanie tego procesu wykracza poza możliwości tego artykułu, odnotujmy jednak dwie formuły arytmetyczne, istotne dla konstrukcji dowodu twierdzenia Gödla. Pierwsza to formuła $Bew(x, y)$, oznaczająca, że x jest numerem dowodu formuły o numerze y; druga to formuła $Sb(x, v, Z(y))$, reprezentująca, mówiąc w uproszczeniu, formułę powstałą przez zastąpienie w formule x zmiennej v przez y. Na przykład, formuła $\forall x \neg Bew(x, y)$ mówi, że żadna liczba nie jest numerem dowodu formuły o numerze y, czyli – innymi słowy – formuła o numerze y nie ma dowodu. Niech teraz n będzie numerem następującej formuły, w której dokonano pewnego podstawienia:

$$\forall x \neg Bew(x, Sb(y, 19, Z(y))).$$

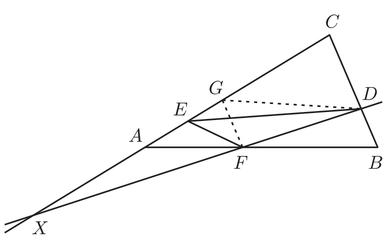
Przyjrzyjmy się formule (i to ona właśnie będzie zdaniem G)

$$\forall x \neg Bew(x, Sb(n, 19, Z(n))).$$

$Sb(n, 19, Z(n))$ jest numerem formuły otrzymanej przez zastąpienie w formule o numerze n zmiennej o numerze 19 (czyli y) przez n. Ale to jest właśnie formuła G! Mówi zatem formuła G o tym, że formuła G nie ma dowodu! Jak wykazuje Gödel, nie ma dowodu także jej negacja. System nie jest zupełny (przypomnijmy, jeśli jest niesprzeczny).

Tak Gödel wykorzystał twórczo oba przedstawione wyżej paradoksy. Dla pełności obrazu warto jeszcze dodać, że posługując się formułą G, udowodnił on także, że jeśli system jest niesprzeczny, to w ramach tego systemu nie można tej niesprzeczności udowodnić. Można to zrobić w systemie obszerniejszym – pod warunkiem, że jest on niesprzeczny. Żyjemy zatem w świecie niesprzeczności warunkowej… Paradoks?

Rozwiązanie zadania M 1357.
Niech G będzie takim punktem na boku AC, że $\frac{CG}{GA} = \frac{BF}{FA}$. Skoro $\frac{BF}{FA} \leqslant \frac{CE}{EA}$, to punkt E leży na odcinku AG.



Wobec $\frac{BD}{DC} \leqslant \frac{BF}{FA}$ prosta DF jest równoległa do prostej AC lub przecina ją w punkcie X leżącym od strony punktu A na zewnątrz odcinka AC. Zatem

$$[DEF] \leqslant [DGF],$$

tzn. możemy *przepchnąć* punkt E do gorszego przypadku – punktu G. Ponieważ pole trójkąta DGF nie zależy od położenia punktu D na odcinku BC, więc mamy

$$[DGF] = [BGF] = \frac{BF}{FA}[AGF] = \\ = \frac{BF}{FA}\left(\frac{AF}{AB}\right)^2[ABC].$$

Niech $t = \frac{AF}{AB} \leqslant 1$. Wówczas

$$\frac{BF}{FA} = \frac{1-t}{t}$$

i mamy

$$[DEF] \leqslant \frac{1-t}{t}t^2[ABC] = \\ = t(1-t)[ABC] \leqslant \frac{1}{4}[ABC].$$

Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $t = \frac{1}{2}$ i $[DEF] = [DGF]$. Ale $[DEF] = [DGF]$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $DF \parallel AC$ lub $E = G$. Zatem równość w tezie zadania zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt F oraz punkt D lub E są środkami odpowiednich boków trójkąta ABC.