Efekty relatywistyczne w zasięgu ręki?

Piotr ZALEWSKI

Prędkość c, nazywana prędkością światła, jest równa 299 792 458 m/s. Dokładnie, bo metr jest zdefiniowany za jej pomocą i z wykorzystaniem wzorca sekundy. To, w porównaniu z prędkościami, których doświadczamy, bardzo, bardzo dużo. Na przykład samolot myśliwski o długości 10 metrów, lecący z prędkością $u = 3\,\mathrm{km/s}$, skróci się lorentzowsko przez czynnik $\sqrt{1-u^2/c^2}$, czyli o pięć angstremów, a więc długość odpowiadającą pojedynczej cząsteczce paliwa lotniczego.

Jak widać, mierzalne efekty relatywistyczne wydają się dla zwykłego śmiertelnika nieobserwowalne.

A jednak, podobnie jak monsieur Jourdain nie zdawał sobie sprawy, że mówi prozą, tak my możemy nie wiedzieć, że efekty relatywistyczne własnoręcznie wielokrotnie badaliśmy.

Zacznijmy od eksperymentu myślowego. Wyobraźmy sobie dwa bardzo długie, położone bardzo blisko siebie i bardzo wąskie taśmociągi, poruszające się przeciwbieżnie z prędkościami v i $-v$. Na taśmociągach umocowane są, w jednakowych odstępach l, ładunki $+q$ na tym poruszającym się w prawo oraz $-q$ na tym poruszającym się w lewo. Liniowa gęstość ładunku taśmociągów wynosi więc $\sigma_+ = +q/l = +\sigma$ oraz $\sigma_- = -q/l = -\sigma$. Z odpowiednio dużej odległości r taśmociągi są równoważne prądowi o sumarycznej gęstości liniowej

$$j_\Sigma = j_+ + j_- = v\sigma_+ - v\sigma_- = 2v\sigma.$$

Następnie umieśćmy, w odległości r od tak skonstruowanego „przewodnika" z prądem, spoczywający ($v_p = 0$) ładunek próbny $+q$. Na ładunek ten nie będzie działać żadna siła ze strony „przewodnika", bo sumaryczna liniowa gęstość ładunku jest, z konstrukcji, zerowa.

A teraz spójrzmy na tę sytuację z układu, który porusza się w prawo z prędkością $u = v$. W układzie tym dodatnio naładowany taśmociąg spoczywa. Ponieważ prędkości taśmociągów są niewielkie, to spróbujmy opisać tę sytuację za pomocą transformacji Galileusza. Zgodnie z nią prędkości po prostu się dodają. Wtedy ujemnie naładowany taśmociąg porusza się z prędkością $v_-^* = v_- - u = -2v$, a więc sumaryczna gęstość prądu wynosi tyle samo co poprzednio (natężenie prądu nienaładowanego przewodnika jest niezmiennikiem transformacji Galileusza):

$$j_\Sigma^* = j_+^* + j_-^* = 0 - 2v(-\sigma) = j_\Sigma.$$

Gęstość ładunku również nie ulega zmianie, bo transformacja Galileusza na nią nie wpływa.

Z symetrii wynika, że indukcja pola magnetycznego musi być skierowana stycznie do okręgów, dla których przewodnik jest osią symetrii, a jej wartość, pomnożona przez obwód takiego okręgu, powinna odpowiadać prądowi, który przepływa (na wskroś) przez powierzchnię koła (prawo Ampère'a). Stąd

$$B = \frac{\mu_0 j}{2\pi r},$$

gdzie r jest promieniem okręgu, a j, jako gęstość liniowa, jest równe natężeniu prądu.

Ponieważ jednak ładunek próbny porusza się obecnie z prędkością $v_p^* = -v$, więc okazuje się, że działa na niego siła (odpychająca, tak jak między przewodnikami o przeciwnych kierunkach prądu):

$$F_M^* = +q(-v)B = +q(-v)\frac{\mu_0 j_\Sigma^*}{2\pi r}.$$

Nie jest dobrze. Rozpatrywane układy są inercjalne. Jeśli w jednym nie działa siła, to (w zgodzie z doświadczeniem) w drugim także działać nie może.

Spróbujmy temu zaradzić za pomocą transformacji Lorentza. Zgodnie z nią prędkości dodają się trochę inaczej. Jeżeli układ primowany porusza się względem nieprimowanego z prędkością u, to (równoległa do u i skierowana w tę samą stronę) prędkość w w układzie nieprimowanym przejdzie na

$$w' = \frac{w-u}{1-\frac{wu}{c^2}}.$$

Oprócz tego poruszające się (względem jakiegoś układu inercjalnego) z prędkością w ciała ulegają skróceniu (w tym układzie) o czynnik

$$\frac{1}{\gamma_w} = \sqrt{1-(w/c)^2}$$

wzdłuż kierunku ruchu, co w naszym przypadku powoduje wzrost gęstości liniowej ładunku o czynnik γ_w (bo skracający się odstęp l jest w mianowniku).

Teraz należy uważać (ale tylko przez chwilę). Jeżeli popatrzymy na taśmociąg z układu, w którym taśmociąg spoczywa, to zmierzymy gęstość ładunku $\pm\sigma_0$, która z gęstością ładunku $\sigma_\pm$ w układzie początkowym (tym opisanym na początku) jest związana warunkiem $\sigma_\pm = \gamma_{\pm v}(\pm\sigma_0) = \gamma_v(\pm\sigma_0)$, natomiast gęstość prądu warunkiem $j_\pm = \pm v\sigma_\pm = \pm v\gamma_v(\pm\sigma_0) = v\gamma_v\sigma_0$. Oczywiście, musi to być prawda dla dowolnej prędkości w poruszania się danego taśmociagu (tu dla dodatnio naładowanego):

$$\sigma_w = \gamma_w\sigma_0,$$
$$j_w = w\gamma_w\sigma_0.$$

Bezpośrednim rachunkiem można sprawdzić następujące równości:

$$\gamma_{w'} = \gamma_w\gamma_u\left(1 - \frac{wu}{c^2}\right),$$
$$\gamma_{w'}w' = \gamma_w\gamma_u(w-u).$$

Łatwo wtedy wykazać (podstawiając i porządkując), że pod wpływem opisanych wyżej transformacji z układu początkowego do układu poruszającego się z względną prędkością u (układu primowanego), kombinacja (σ, j) przekształca się analogicznie do kombinacji czasu i położenia (t, x).

$$\sigma' = \gamma\left(\sigma - \frac{u}{c}\cdot\frac{j}{c}\right),$$
$$j' = \gamma(j - u\cdot\sigma).$$

Dzięki temu możemy dokładną analizę zaaranżowanej sytuacji pozostawić Czytelnikowi i po prostu (znając j_Σ oraz $\sigma_\Sigma = 0$) obliczyć sumaryczną gęstość (liniową) ładunku oraz sumaryczną gęstość (liniową) prądu w układzie primowanym:

$$\sigma'_\Sigma = \gamma_u\left(\sigma_\Sigma - \frac{u}{c}\cdot\frac{j_\Sigma}{c}\right) = \gamma_u\cdot\frac{-u}{c}\cdot\frac{j_\Sigma}{c},$$
$$j'_\Sigma = \quad \gamma_u(j_\Sigma - u\cdot\sigma_\Sigma) = \gamma_u\cdot j_\Sigma,$$

co daje następujące wartości siły elektrycznej F'_E (przyciągającej dla $u = v$, bo σ' jest wtedy ujemne) oraz siły magnetycznej F'_M (odpychającej, jak poprzednio):

$$F'_E = \quad q'\cdot E' = \quad q'\cdot\frac{\sigma'_\Sigma}{\epsilon_0 2\pi r} = \kappa\cdot\epsilon_0^{-1}c^{-2},$$
$$F'_M = -u\cdot q'\cdot B' = -u\cdot q'\cdot\frac{\mu_0 j'_\Sigma}{2\pi r} = \kappa\cdot\mu_0,$$

gdzie $\kappa = -uq'\cdot\gamma_u j_\Sigma/(2\pi r)$, a q' jest wartością ładunku próbnego w układzie primowanym (nie musimy wnikać w to, jaka jest jego wartość). Siły te się znoszą, o ile $\epsilon_0\mu_0 = c^{-2}$. To, dla wychowanych na układzie SI, nie musi być oczywiste, ale przecież przenikalności dielektryczna ϵ_0 i magnetyczna μ_0 próżni to tylko przeliczniki jednostek właśnie przez tę relację zdefiniowane!

Uzmysławiamy sobie w ten sposób, że elektromagnetyzm klasyczny jest teorią relatywistyczną. Wszelkie klasyczne efekty magnetyczne można wyjaśnić za pomocą szczególnej teorii względności. Paradoksalnie jednak, takie proste rozważania sprawdzają się tylko dla niewielkich prędkości (dopóki można nie uwzględniać efektów związanych ze skończoną prędkością światła).

Efekty magnetyczne są mierzalne, bo oddziaływanie elektromagnetyczne jest dużo silniejsze niż grawitacyjne, które determinuje naszą codzienną wrażliwość, oraz dlatego, że dość łatwo zaaranżować sytuację, w której ładunki się poruszają, ale są zbilansowane.

W każdym razie, ilekroć przyczepiamy magnesikiem przypominajkę do lodówki, tylekroć doświadczalnie potwierdzamy szczególną teorię względności.

Rozwiązanie zadania M 1358.

Odpowiedź: Oto przykład, w którym taki podzbiór nie istnieje.

Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{F} = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots\},$$

gdzie, dla $n \geqslant 1$,

$$A_n = \{1, 3, \ldots, 2n-1\} \cup \{2n\},$$
$$B_n = \{2, 4, \ldots, 2n\} \cup \{2n+1\}.$$

Oczywiście, pary zbiorów A_k, A_l, jak również B_k, B_l mają wspólny element. Zbiory A_k i B_l też mają wspólny element – gdy $k \leqslant l$, jest nim $2k$, w przeciwnym przypadku jest nim $2l+1$. Skoro $A_n \cap B_n = \{2n\}$, zbiór S musiałby zawierać wszystkie liczby parzyste, byłby więc nieskończony.

Natężenie pola elektrycznego obliczamy ponownie, wykorzystując symetrię układu. Rozpatrzmy walec o promieniu r i długości d, którego osią symetrii jest „przewodnik”. Z prawa Gaussa wynika, że natężenie radialnie rozchodzącego się pola elektrycznego, w odległości r od przewodnika, pomnożone przez powierzchnię boczną walca $2\pi rd$, jest proporcjonalne do ładunku σd wewnątrz walca. W ten sposób otrzymujemy

$$E = \frac{\sigma\cdot d}{\epsilon_0 2\pi r\cdot d} = \frac{\sigma}{\epsilon_0 2\pi r},$$

czyli postać analogiczną do wzoru na indukcję pola magnetycznego dla opisywanej sytuacji.