Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 530 ($WT = 1{,}80$) i 531 ($WT = 3{,}70$) z numeru 1/2012

Marian Łupieżowiec	Gliwice	41,85
Jacek Piotrowski	Rzeszów	41,56
Michał Koźlik	Gliwice	39,86
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	36,71
Krzysztof Magiera	Łosiów	22,60

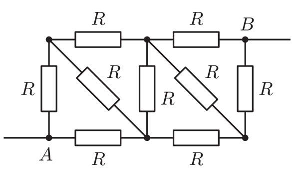
Rozwiązania zadań z numeru 3/2012

Redaguje Ewa CZUCHRY

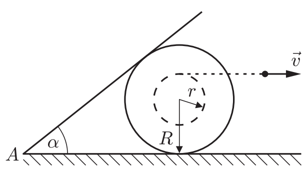
Przypominamy treść zadań:

534. Jaki jest opór między punktami A i B układu pokazanego na rysunku 1?

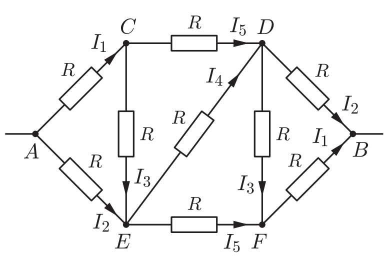
535. Szpulka nici toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni. Prędkość końca nitki jest skierowana poziomo i ma wartość v_0, wewnętrzny i zewnętrzny promień szpulki to r i R odpowiednio. Na szpulce opiera się deseczka zaczepiona zawiasem w punkcie A (rys. 2). Znaleźć prędkość kątową ω deseczki w zależności od kąta α.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

534. Układ można przerysować tak jak na rysunku 3. Z pierwszego prawa Kirchhoffa w węzłach C i E mamy

$$I_1 = I_3 + I_5, \qquad I_2 + I_3 = I_4 + I_5.$$

Z drugiego prawa Kirchhoffa otrzymujemy

$$(I_3 + I_4)R = I_5R, \qquad (I_1 + I_3)R = I_2R, \qquad (I_1 + I_2 + I_5)R = U.$$

Z powyższych równań wynika, że

$$I_2 = \frac{6}{5}I_1, \qquad I_3 = \frac{1}{5}I_1, \qquad I_4 = \frac{3}{5}I_1, \qquad I_5 = \frac{4}{5}I_1,$$

stąd

$$3RI_1 = U.$$

Zatem

$$R_{AB} = \frac{U}{I_1 + I_2} = \frac{5}{11}\frac{U}{I_1} = \frac{15}{11}R.$$

535. Przypuśćmy, że w pewnej chwili prędkość kątowa szpulki jest równa ω. Wtedy prędkość liniowa u punktu, w którym deseczka opiera się o szpulkę, jest równa $\omega R \operatorname{ctg}(\alpha/2)$. Prędkość tego punktu względem deski będzie skierowana wzdłuż deseczki, ponieważ cały czas styka się ona ze szpulką. Stąd:

$$\omega R \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = u \sin\alpha.$$

Ruch szpulki odbywa się bez poślizgu, zatem:

$$\frac{v_0}{R} = \frac{u}{r + R}.$$

Ostatecznie

$$\omega = \frac{v_0(r + R)}{R} \cdot \sin\alpha \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{R} = \frac{2v_0(r + R)}{R^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Rozwiązanie zadania M 1355.
Niech $a_n = 3^{2^n}$. Zauważmy, że $a_{n+1} = a_n^2$, więc skoro a_1 daje resztę 2 z dzielenia przez 7, to a_2 daje resztę $2^2 = 4$, a_3 – tę samą resztę co $4^2 = 16$, czyli znowu 2, itd. Podobnie, jeśli $b_n = 5^{2^n}$, to $b_1, b_2, b_3, b_4, \ldots$ dają odpowiednio reszty $4, 2, 4, 2, \ldots$ z dzielenia przez 7. Zatem nasza liczba $c_n = 2 \cdot 3^{2^n} + 3 \cdot 5^{2^n}$ dla n nieparzystego daje tę samą resztę przy dzieleniu przez 7 co $2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 16$, czyli 2, a dla n parzystego tę samą resztę co liczba $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$, czyli 0.

Rozwiązanie zadania F 816.
Średnia prędkość atomów wodoru w fotosferze jest równa

$$v = \sqrt{3RT/M} \approx 1{,}2 \cdot 10^4 \text{ m/s}.$$

Druga prędkość kosmiczna na powierzchni Słońca wynosi

$$v_{II} = \sqrt{2GM_\odot/R_\odot} = 6{,}1 \cdot 10^5 \text{ m/s}.$$

Zatem większość atomów wodoru nie może wyrwać się z zasięgu pola grawitacyjnego Słońca. Część o prędkości znacznie większej od średniej pokonuje siłę ciężkości, tworząc wiatr słoneczny.

Rozwiązanie zadania F 815.
Większa kulka po odbiciu się od podłogi będzie miała prędkość $\sqrt{2gH}$. Mniejsza w układzie związanym z większą kulką będzie miała prędkość $2\sqrt{2gH}$, po zderzeniu się z nią taką samą, ale skierowaną w drugą stronę.
W układzie związanym z ziemią prędkość po zderzeniu będzie więc wynosiła $3\sqrt{2gH}$. Kulka wzniesie się zatem na wysokość $9H$.

Klub 44

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 629 ($WT = 1{,}16$) i 630 ($WT = 2{,}82$) z numeru 11/2011

Paweł Kubit	Kraków	43,31
Tomasz Tkocz	Rybnik	42,75
Jerzy Cisło	Wrocław	40,37
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Roksana Słowik	Knurów	37,03
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Adam Dzedzej	Gdańsk	33,55

Rozwiązania zadań z numeru 3/2012

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

637. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których zbiór $\{1, \ldots, n\}$ daje się przedstawić jako suma trzech rozłącznych zbiorów o równych sumach elementów.

638. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c \geqslant abc$. Udowodnić, że co najwyżej jedna z liczb
$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{3c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$$
jest mniejsza od 1.

637. Jeśli takie rozbicie jest możliwe, to oczywiście suma liczb w zbiorze $\{1, \ldots, n\}$ musi być podzielna przez 3 – czyli iloczyn $n(n + 1)$ musi dzielić się przez 6. To zaś ma miejsce jedynie dla liczb $n \not\equiv 1 \pmod 3$. Jest to więc warunek konieczny. Okazuje się, że dla $n > 3$ jest on też dostateczny (jasne, że dla $n = 3$ nie da się zbioru $\{1, 2, 3\}$ rozbić w żądany sposób).

Dla $n = 5, 6, 8, 9$ mamy, na przykład, takie rozbicia:
$$\{1, 2, 3, 4, 5\} = \{1, 4\} \cup \{2, 3\} \cup \{5\},$$
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 6\} \cup \{2, 5\} \cup \{3, 4\},$$
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} = \{1, 2, 3, 6\} \cup \{5, 7\} \cup \{4, 8\},$$
$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{7, 8\} \cup \{6, 9\}.$$
A dalej działa indukcja ze skokiem o 6. Jeśli bowiem zbiór $\{1, \ldots, n\}$ da się przedstawić jako suma trzech rozłącznych podzbiorów o równych sumach elementów, to zbiór $\{1, \ldots, n + 6\}$ też da się tak przedstawić – wystarczy dołączyć do pierwszego podzbioru liczby $n + 1$ i $n + 6$, do drugiego – liczby $n + 2$ i $n + 5$, wreszcie do trzeciego – liczby $n + 3$ i $n + 4$.

Szukanymi liczbami są więc wszystkie liczby $n > 3$, dla których $n - 1$ nie dzieli się przez 3.

638. Przypuśćmy, wbrew dowodzonej tezie, że dwie spośród wymienionych liczb są mniejsze od 1; niech, na przykład,
$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c} < 1, \qquad \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{a} < 1.$$
Oznaczmy odwrotności liczb a, b, c odpowiednio przez x, y, z. Warunek $a + b + c \geqslant abc$ przybiera postać $yz + zx + xy \geqslant 1$; zaś dwie domniemane nierówności przepisujemy jako
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z < 1, \qquad \frac{y}{3} + \frac{z}{2} + x < 1;$$
po pomnożeniu przez 6 otrzymujemy
$$2x + 3y + 6z < 6, \qquad 2y + 3z + 6x < 6.$$
Stąd przez dodanie stronami mamy $8x + 5y + 9z < 12$, czyli
$$y < \frac{12 - 8x - 9z}{5}.$$
Uzyskujemy teraz ciąg nierówności
$$1 \leqslant yz + zx + xy < (x + z) \cdot \frac{12 - 8x - 9z}{5} + zx =$$
$$= 1 - \frac{1}{5}(2x - 1)^2 - \frac{1}{5}(2x + 3z - 2)^2 \leqslant 1.$$
Jest to oczekiwana sprzeczność, która kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 1356.
Równanie z treści zadania
$$1000a + 100b + 10c + d + 1 = (10a + c + 1)(10b + d + 1)$$
jest równoważne następującemu:
$$100a(9 - b) + 10a(9 - d) + 10b(9 - c) + c(9 - d) = 0.$$
Ponieważ $a > 0$ i wszystkie składniki lewej strony są nieujemne, to musi być $b = d = 9$. Podobnie nierówność $b > 0$ implikuje, że $c = 9$. Otrzymujemy więc liczby
$$\overline{a999}, \qquad a \in \{1, \ldots, 9\},$$
które, jak łatwo sprawdzić, spełniają ostatnie równanie. Są to więc wszystkie rozwiązania równania danego w treści zadania.