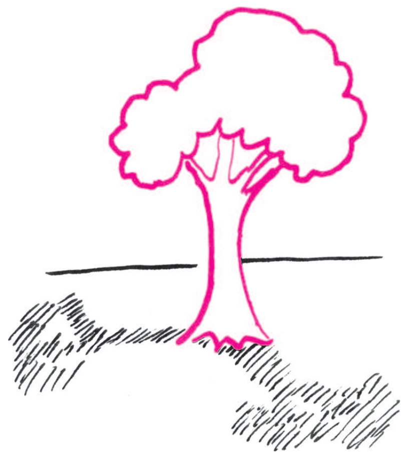


W rozumowaniach był błąd

Marek KORDOS

W poprzednim numerze *Delty* przedstawiłem trzy dowody V postulatu Euklidesa. Dla wszystkich Czytelników było jasne, że zawierają one błędy. Fakt, że mimo to każdy z nich przez pewien czas był uznany za poprawny, wskazuje na ogromny kłopot, jakim dla myślicieli – już niekoniecznie matematyków – było przyjęcie do wiadomości, że mogą istnieć dwie wykluczające się, ale poprawne, a więc w szczególności niesprzeczne teorie opisujące ten sam obiekt, w tym przypadku przestrzeń. A przecież przestrzeń, w której „odbywa się" Wszechświat, jest jedna.

Powstało więc pytanie, jak – niezależnie od odwoływania się do Natury – można stwierdzić poprawność teorii. Rozwiązanie przyniosła lekka modyfikacja tego pytania przez Felixa Kleina: zapytał on

jak stwierdzić, że jedna teoria jest co najmniej tak poprawna, jak druga?

I odpowiedział na to pytanie: *jeśli w teorii* T_1 *można zbudować model teorii* T_2, *to teoria* T_2 *jest co najmniej tak samo poprawna*, *jak teoria* T_1.

Po czym zbudował (w 1870 roku) model geometrii powstającej przez dołączenie do czterech początkowych postulatów Euklidesa zaprzeczenia piątego postulatu w geometrii euklidesowej (*model Kleina*) oraz w tej geometrii model geometrii euklidesowej (*horysfera*). W ten sposób wykazał, że obie geometrie są jednakowo poprawne.

A filozoficzny problem istnienia dwu teorii opisujących ten sam obiekt został niewiele później rozstrzygnięty według pomysłu fizyka, Hermanna Helmholtza, który w pracy *O faktach, które leżą u podstaw geometrii* zaproponował, by matematyki nie uważać za naukę przyrodniczą, lecz za skrzynkę z narzędziami do uprawiania nauk przyrodniczych.

Model Kleina

Do wskazania błędów w przytoczonych dowodach V postulatu potrzebny będzie nam – rzecz jasna – tylko pierwszy z modeli zbudowanych przez Kleina. Oto on.

- Płaszczyzną będzie wnętrze koła (bez brzegu! – oznaczmy ten brzeg o).
- Prostymi będą cięciwy tego koła (oczywiście, bez końców).
- Proste będą prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy przedłużenie jednej z nich przechodzi przez punkt przecięcia stycznych do o w końcach drugiej (okazuje się, że jest to relacja symetryczna) lub gdy jedna z nich przechodzi przez środek koła, a druga jest euklidesowo do niej prostopadła.

To określa model całkowicie, a wynika z tego, między innymi, że

- odległość punktów A i B to
$$\lambda \cdot \left| \ln \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} \right|,$$
gdzie P i Q to końce prostej AB, XY to euklidesowa długość odcinka XY, a λ jest dowolnie ustaloną stałą dodatnią;
- punkty równoodległe od prostej tworzą elipsę styczną do o w końcach tej prostej;
- kąt między prostymi to euklidesowy kąt, jaki tworzą okręgi prostopadłe do o i przechodzące przez końce tych prostych.

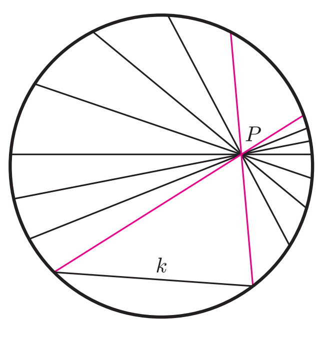
Czytelnik Ciekawski może z tego wyprowadzić wszelkie własności tej nieeuklidesowej geometrii zwanej geometrią Bolyaia–Łobaczewskiego na cześć dwóch odważnych matematyków, którzy pierwsi uparli się, że taka geometria istnieje (lub geometrią hiperboliczną ze względu na jej analityczne własności). My zauważymy wstępnie, że nie jest w niej spełniony V postulat: przez punkt P poza prostą k przechodzi nieskończenie wiele prostych z nią rozłącznych (rys. 1). O tych dwu, które mają z k wspólne końce, mówimy, że są do k równoległe, o pozostałych – że są nadrównoległe.

Felix Klein (1849–1925), matematyk niemiecki, wywarł ogromny wpływ na rozwój matematyki, proponując oparcie jej nie na aksjomatach i naśladowaniu fizyki, lecz na przekształceniach, a zwłaszcza grupach przekształceń. W ciągu stulecia spowodowało to zasadniczą restrukturyzację matematyki zwaną przełomem bourbakistowskim.

Hermann Helmholtz (1821–1894) przytoczoną w tekście pracę napisał w 1868 roku pod wpływem lektury wykładu habilitacyjnego Bernharda Riemanna (1826–1866) z 1854 roku, *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii*, w którym Riemann wskazuje na możliwość tworzenia bogatej rodziny geometrii nieeuklidesowych – tak uprawia się geometrię dzisiaj.

János Bolyai (czyt. bojoj) (1802–1860), matematyk węgierski; jego praca dotycząca geometrii nieeuklidesowej (1823) została źle przyjęta przez środowisko naukowe i ukazała się dopiero w 1832 roku jako dodatek do książki ojca poświęconej dydaktyce matematyki. Gdy okazało się, że w Niemczech wydano i pozytywnie przyjęto pracę Łobaczewskiego, János załamał się i spędził resztę życia w całkowitym odosobnieniu.

Nikołaj Łobaczewski (1792–1856), matematyk rosyjski (z polskimi korzeniami), opublikował w 1826 roku w Kazaniu pracę *О началах геометрии*, którą powszechnie poznano po wydrukowaniu jej w 1840 roku po niemiecku. Wobec wątpliwości co do jej filozoficznego (i religijnego) znaczenia Łobaczewski został usunięty ze stanowiska rektora uniwersytetu w Kazaniu i przeniesiony na emeryturę.

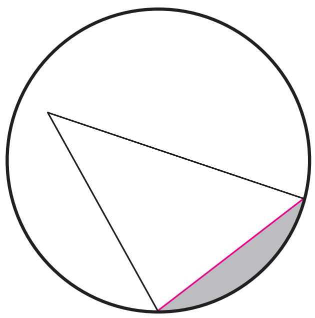


Rys. 1

Na czym polegały błędy?

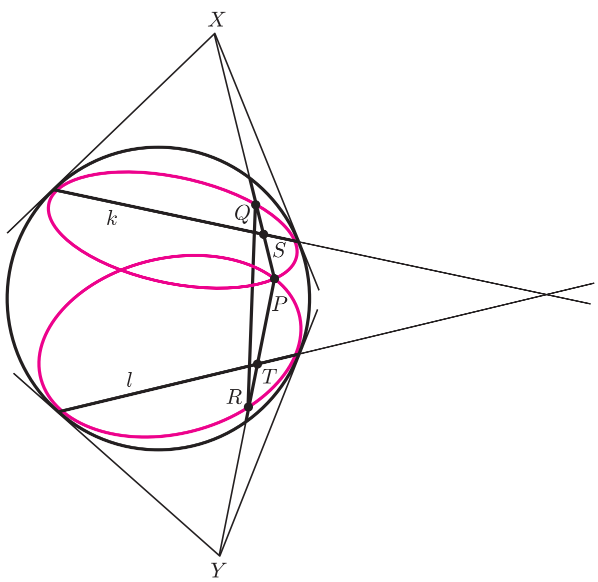
Już z oglądu rysunku 1 można stwierdzić, że Saccheri żadnego błędu **matematycznego** nie popełnił – w geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego (B–Ł) proste równoległe są asymptotyczne. Mylił się tylko w intuicji, że takie coś prostym przydarzyć się nie może. Faktycznie jego praca *Euclides ab omni naevo vindicatus* była pierwszą pracą z geometrii B–Ł, ale o tym przekonano się dopiero dwa wieki później.

Legendre popełnił – można powiedzieć – pół błędu: pierwsza część jego dowodu, gdy wykazuje, że suma kątów trójkąta w geometrii absolutnej nie może być większa od π, jest poprawna. Uzyskany wynik dziś nazywa się *twierdzeniem Saccheriego–Legendre'a*, bo i u Saccheriego można znaleźć podobne rozumowanie.



Rys. 2

Natomiast dowód, że nie ma trójkątów o sumie kątów mniejszej od π, korzysta ze zdawałoby się oczywistej przesłanki: *przez punkt wewnątrz kąta wypukłego można poprowadzić prostą przecinającą oba jego ramiona*. Jej fałszywość widać na rysunku 2. Kolorowa prosta jest równoległa do obu ramion kąta – nazywa się ją *prostą zagradzającą*. Zacieniowany obszar za nią składa się – co łatwo sprawdzić linijką – z punktów, przez które nie można poprowadzić prostej przecinającej oba ramiona kąta (punkty A' i B' z dowodu Legendre'a mogą nie istnieć).



Rys. 3

Sprawa z dowodem Farkasa Bolyaia jest (chyba) prostsza, choć obrazek będzie większy. Okazuje się bowiem, że w geometrii B–Ł istnieją trójkąty, na których nie można opisać okręgu – po prostu symetralne ich boków nie przecinają się! Pokazuje to rysunek 3.

Nieprzecinające się proste k i l będą symetralnymi trójkąta, który buduje się tak. Bierzemy między nimi jakiś punkt P i rysujemy elipsy przechodzące przez ten punkt i styczne do o odpowiednio w końcach prostych k i l – są to linie, które składają się z punktów odległych tak jak P odpowiednio od prostej k i l (druga czarna kropka na poprzedniej stronie) – zatem S jest środkiem PQ, a T środkiem PR. Każda prosta, której przedłużenie przechodzi przez X (przez Y), jest prostopadła do k (do l) – trzecia kolorowa kropka. Zatem k jest symetralną PQ, a l symetralną PR. Wobec tego na trójkącie PQR nie można opisać okręgu.

Inne zdania równoważne V postulatowi

Zatem każde ze zdań

– *przez punkt wewnętrzny kąta wypukłego można poprowadzić prostą przecinającą oba ramiona kąta*;
– *na trójkącie można opisać okrąg*;

jest równoważne V postulatowi na gruncie początkowych czterech.

Czytelnik Zainteresowany sprawdzi, że podobnie jest ze zdaniami:

– *istnieją nieprzystające trójkąty podobne*;
– *na płaszczyźnie każda prosta przecina przynajmniej jedną z przecinających się prostych*;
– *istnieją trzy współliniowe punkty jednakowo odległe od danej prostej*;
– *odległość punktów zorientowanej prostej od innej prostej jest funkcją monotoniczną*;
– *odległość punktów prostej od współpłaszczyznowej i rozłącznej z nią prostej jest ograniczona* (*do wyboru*: *z góry lub z dołu*);
– *istnieje prostokąt*;
– *wysokości trójkąta przecinają się*

itd.

Można, oczywiście, zbudować trójwymiarowy model Kleina. Będzie to kula bez brzegu – reszta bez zmian. Horysfera to elipsoida obrotowa (powierzchnia), której oś obrotu przechodzi przez środek tej kuli, i która jest styczna do brzegu tej kuli (a więc bez jednego punktu!). Dodatkowo zakładamy, że (gdy kulę potraktujemy jak jednostkową) pozostałe osie mają długość równą kwadratowi długości osi obrotu. Na tej powierzchni za proste uważamy przecięcia jej z płaszczyznami modelu Kleina przechodzącymi przez brakujący punkt. Uważamy te proste za prostopadłe, gdy powstały z płaszczyzn prostopadłych. Geometria na tej powierzchni jest wtedy identyczna z geometrią płaszczyzny euklidesowej.

Ale to już opowieść na inną okazję.