VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

W dniu 18 marca 2012 r. zakończyła się VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów. W zawodach pierwszego stopnia wzięło udział 14176 uczniów z 1312 szkół, w tym z kilku szkół polskich w Wilnie. Do zawodów drugiego stopnia zakwalifikowano 1403 uczniów z 627 szkół, a do zawodów trzeciego stopnia (finałowych) – 214 uczniów ze 111 szkół.

Zawody finałowe, podczas których uczestnicy zmagali się z pięcioma zadaniami w czasie trzech godzin, odbyły się 17 marca 2012 r. w Warszawie.

Poniżej przedstawiamy dwa zadania z zawodów finałowych. Pierwsze z nich okazało się dla uczestników najłatwiejsze, a drugie – najtrudniejsze.

1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x, dla których liczby $x+\sqrt{3}$ oraz $x^2+\sqrt{3}$ są wymierne.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy przez a i b odpowiednio liczby wymierne $x+\sqrt{3}$ oraz $x^2+\sqrt{3}$. Wówczas $x=a-\sqrt{3}$. Stąd otrzymujemy

$$b=(a-\sqrt{3})^2+\sqrt{3}=(1-2a)\sqrt{3}+a^2+3,$$

czyli

$$(1-2a)\sqrt{3}=b-a^2-3.$$

Przypuśćmy, że liczba $1-2a$ jest różna od zera. Wówczas

$$\sqrt{3}=\frac{b-a^2-3}{1-2a}.$$

Liczba po prawej stronie ostatniej równości jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych. Otrzymujemy więc sprzeczność, z której wynika, że $1-2a=0$. Wobec tego $a=\frac{1}{2}$, czyli $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $x=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$ spełnia warunki zadania. Na mocy powyższego rozumowania jest to jedyna liczba o żądanej własności.

2. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu, i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania. Wykażemy, że takie cztery punkty istnieją w *każdym* czworościanie.

Rozważmy dowolny czworościan $ABCD$, w którym $BC=a$, $AD=b$. Na krawędziach AB, AC, DB i DC wybierzmy odpowiednio takie punkty K, L, M, N, że

$$\frac{AK}{KB}=\frac{AL}{LC}=\frac{DM}{MB}=\frac{DN}{NC}=\frac{b}{a}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste KL i MN są równoległe. Wobec tego punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto z twierdzenia Talesa obliczamy

$$\frac{KL}{BC}=\frac{AK}{AB}=\frac{b}{a+b},$$

skąd

$$KL=BC\cdot\frac{b}{a+b}=\frac{ab}{a+b}.$$

Analogicznie wykazujemy, że każdy z odcinków LN, NM, MK ma długość $ab/(a+b)$. Stąd wniosek, że czworokąt $KLNM$ jest rombem.

Niech P będzie środkiem rombu $KLNM$. Punkty przecięcia prostych, zawierających dwusieczne kątów KPM i MPN, z bokami rombu tworzą wierzchołki czworokąta. Czworokąt ten jest kwadratem, gdyż jego przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym.

Waldemar POMPE