Klub 44

4. Należy zaznaczyć na burcie poziom zanurzenia łodzi „ze słoniem", po wyjściu zaś słonia na brzeg ładować tam kamienie, aż łódź się odpowiednio zanurzy, po czym ważyć poszczególne kamienie i dodać…

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 528 ($WT = 2{,}25$) i 529 ($WT = 2{,}40$) z numeru 12/2011

Marian Łupieżowiec	Gliwice	41,85
Jacek Piotrowski	Rzeszów	41,02
Michał Koźlik	Gliwice	36,95
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	36,71
Krzysztof Magiera	Łosiów	20,98

Zadania z fizyki nr 540, 541

Redaguje Ewa CZUCHRY

540. Po poziomym torze rusza z miejsca długi pociąg towarowy i na drodze $l = 1$ km osiąga prędkość $v = 60$ km/h. Lokomotywa ma masę $M = 200$ ton, a każdy z czteroosiowych wagonów o masie $m_1 = 20$ ton ma ładowność $m_2 = 80$ ton i koła o promieniu $r = 500$ mm. Ile maksymalnie obciążonych wagonów może mieć ten pociąg?

541. Szklana kulka o średnicy 5 mm znajduje się roztworze gliceryny. W chwili początkowej kulka ta została upuszczona i zaczęła spadać. Znaleźć początkowe przyspieszenie i prędkość graniczną, jaką osiągnie kulka.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2012

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

532. Ciężarek o masie m_1 wisiał na sprężynce o stałej sprężystości k i drgał z amplitudą A_1. Z góry sypie się w tempie $\alpha = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ cienki strumień piasku, który spada ze stałą prędkością v_p (stałą wskutek np. działania siły oporu powietrza). Piasek pada na ciężarek i przykleja się, dalej drgając razem z nim. Po czasie długim w porównaniu z okresem drgań masa ciężarka wraz z piaskiem wzrosła do wartości m_2. Znaleźć końcową amplitudę drgań. Założyć, że prędkość ruchu ciężarka nie przekraczała prędkości spadku piasku.

533. Wodór H_2 znajduje się w temperaturze 300 K pod ciśnieniem 100 Pa w naczyniu o stałej objętości. Ile będzie wynosić ciśnienie w naczyniu, jeśli ogrzać wodór do temperatury $3 \cdot 10^6$ K?

532. Przyjmijmy, że ciężarek porusza się z prędkością v do góry, wtedy jego prędkość względem piasku wynosi $v + v_p$. Ponieważ masa piasku na jednostkę długości strumienia jest równa α/v_p, więc masa piasku przyklejonego w ciągu czasu $\mathrm{d}t$ wynosi $\mathrm{d}m' = \alpha(v+v_p)\mathrm{d}t/v_p$. Energia przekształcona w ciepło jest równa

$$\mathrm{d}Q = \frac{1}{2}(v+v_p)^2\mathrm{d}m' = \frac{\alpha}{2v_p}(v+v_p)^3\mathrm{d}t.$$

W ciągu jednego okresu masa ciężarka nie zmienia się znacząco i można przyjąć, że jego ruch jest w przybliżeniu harmoniczny: $v = A\omega\sin\omega t$, gdzie A jest amplitudą, $\omega = \sqrt{k/m}$. Gdy podstawimy zależność $v(t)$ do $\mathrm{d}Q$, rozwiniemy sześcian i scałkujemy względem okresu, niezerowy wkład do całki dadzą tylko parzyste potęgi $\sin\omega t$ – zerowa i druga:

$$Q = \int_0^T \mathrm{d}Q = \frac{1}{2}\alpha v_p^2 T + \frac{3}{4}\alpha A^2\omega^2 T.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest początkową energią kinetyczną piasku przyklejonego w ciągu okresu, zatem drugi składnik (Q_2) jest spadkiem energii drgań w tym czasie. Przechodząc do dłuższej skali czasu, należy wyrażenie $Q_2/T = \frac{3}{4}\alpha A^2\omega^2$ przyrównać do $-\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$, gdzie E jest energią drgań ciężarka, $E = \frac{1}{2}kA^2$. Stąd

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = -\frac{3\alpha}{4m}A.$$

Podstawienie $\alpha\mathrm{d}t = \mathrm{d}m$ i scałkowanie prowadzi do wyniku $Am^{3/4} = \mathrm{const}$, czyli

$$A_2 = A_1\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{3/4}.$$

Jak widać, wartość prędkości piasku nie ma znaczenia.

533. Średnia energia ruchów termicznych k_BT w temperaturze $3 \cdot 10^6$ K wynosi – w przeliczeniu na elektronowolty – około 300 eV, czyli znacznie więcej zarówno od energii dysocjacji cząsteczek wodoru, jak i energii jonizacji atomowego wodoru. Każda cząsteczka H_2 rozpadnie się więc po podgrzaniu na cztery cząstki – dwa jądra i dwa elektrony. Ciśnienie wzrośnie $4 \cdot 10^4$ razy i wyniesie 4 MPa.

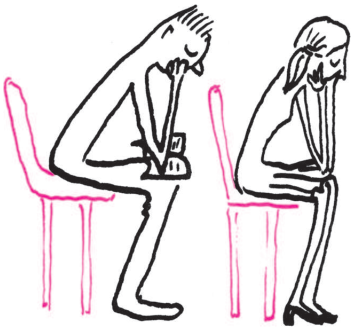
Klub 44

$$\sqrt[\otimes]{\sum!} = 44$$

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 627 ($WT = 2{,}50$) i 628 ($WT = 1{,}33$) z numeru 10/2011

Paweł Kubit	Kraków	42,27
Tomasz Tkocz	Rybnik	39,93
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Jerzy Cisło	Wrocław	36,67
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Roksana Słowik	Knurów	35,87
Adam Dzedzej	Gdańsk	32,39



Zadania z matematyki nr 643, 644

Redaguje Marcin E. KUCZMA

643. Wyznaczyć wszystkie pary (m,n) liczb całkowitych $m \geqslant 3$, $n \geqslant 6$, spełniające równanie

$$\binom{n}{6} = \frac{8m-4}{15m}\binom{m}{3}.$$

644. Dana jest liczba rzeczywista $\alpha > 1$. Obliczyć minimalną wartość funkcji

$$f(x) = (2-x)^{\alpha}(1+x^{\alpha})$$

na przedziale $\langle 0; 1\rangle$.

Zadanie 644 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2012

Przypominamy treść zadań:

635. Niech A, B, C, D, K będą pięcioma różnymi punktami, leżącymi na jednym okręgu. Odległości punktu K od prostych AB, BC, CD, DA wynoszą odpowiednio a, b, c, d. Znaleźć wzór algebraiczny, pozwalający wyznaczyć dowolną z liczb a, b, c, d, gdy znane są trzy pozostałe.

636. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}} - \frac{1}{x_n} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wykazać, że ciąg $(2^n x_n)$ jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

635. Niech R będzie promieniem danego okręgu – opisanego na każdym z trójkątów KAB, KBC, KCD, KDA. Zachodzi równość

$$\frac{|AB|\cdot a}{2} = \frac{|AB|\cdot|KA|\cdot|KB|}{4R},$$

której obie strony wyrażają pole trójkąta KAB. Po uproszczeniu dostajemy pierwszą z wypisanych poniżej równości, a dalsze trzy są jej cyklicznymi odpowiednikami:

$$a = \frac{|KA|\cdot|KB|}{2R}, \qquad b = \frac{|KB|\cdot|KC|}{2R}, \qquad c = \frac{|KC|\cdot|KD|}{2R}, \qquad d = \frac{|KD|\cdot|KA|}{2R}.$$

Stąd wynika wzór, o który pyta zadanie: $ac = bd$.

636. Wyrazy ciągu (x_n) są liczbami dodatnimi. Zapiszmy każdy z nich jako tangens pewnego kąta ostrego:

$$x_n = \operatorname{tg}\alpha_n, \qquad 0 < \alpha_n < \pi/2.$$

Wykażemy, że $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$. Zaczynamy od oczywistej zależności

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{n+1}) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha_{n+1}}{1-(\operatorname{tg}\alpha_{n+1})^2} = \frac{2x_{n+1}}{1-x_{n+1}^2}.$$

Przekształcamy mianownik ostatniego ułamka:

$$1 - x_{n+1}^2 = 1 - \left(\sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}} - \frac{1}{x_n}\right)^2 = 1 - \left(1 + \frac{1}{x_n^2} - 2\cdot\frac{1}{x_n}\sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}} + \frac{1}{x_n^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{x_n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x_n^2}} - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{2x_{n+1}}{x_n}.$$

Po podstawieniu do poprzedniej równości otrzymujemy związek

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{n+1}) = x_n = \operatorname{tg}\alpha_n$$

i w konsekwencji $2\alpha_{n+1} = \alpha_n$ (obie liczby: $2\alpha_{n+1}$ i α_n leżą w przedziale $(0;\pi)$). Tak więc $\alpha_{n+1} = \alpha_n/2$ dla wszystkich n; a skoro $x_0 = 1$, czyli $\alpha_0 = \pi/4$, wnosimy stąd, że

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wystarczy teraz zauważyć, że $\alpha_n \to 0$ i skorzystać ze znanej relacji granicznej

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha} = 1.$$

Otrzymujemy odpowiedź:

$$2^n x_n = 2^n \operatorname{tg}\alpha_n = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\alpha_n} \to \frac{\pi}{4} \qquad \text{przy} \quad n\to\infty.$$

9. Policzymy wszystkie uściski dłoni, które się kiedykolwiek zdarzyły: niech $a_1, \ldots, a_s$ to będą liczby tych, którzy uścisnęli dłonie – odpowiednio – $P_1, \ldots, P_s$ osobom, natomiast $b_1, \ldots, b_k$ – liczby tych, którzy uścisnęli dłonie $N_1, \ldots, N_k$ osobom, przy czym $P_1, \ldots, P_s$ to liczby parzyste, $N_1, \ldots, N_k$ zaś – nieparzyste. Podwojona suma wszystkich uścisków to

$$a_1\cdot P_1 + \ldots + a_s\cdot P_s + b_1\cdot N_1 + \ldots + b_k\cdot N_k$$

i jest to liczba podzielna przez 2, więc $b_1\cdot N_1 + \ldots + b_k\cdot N_k$ też jest podzielna przez 2. Interesuje nas suma $b_1 + \ldots + b_k$, która również jest liczbą parzystą, bo parzystość liczby $b_i\cdot N_i$ jest dla każdego i taka sama, jak parzystość b_i.