Kilka zadań, o których...

*Krzysztof CIESIELSKI**

*Instytut Matematyki, Uniwersytet Jagielloński

Na IV Konferencji Stowarzyszenia Edukacji Matematycznej miałem przyjemność mówić o matematycznych zadaniach „o których nie wiedzieliście, że o nich nie wiedzieliście”. Sformułowanie to nawiązuje do niedawno przełożonej na język polski książki Johna Barrowa *100 essential things you didn't know you didn't know*, której tytuł w polskim przekładzie brzmi, nie wiedzieć czemu, *Jak wygrać na loterii? Czyli z matematyką na co dzień.* Poniżej – kilka spośród zadań, o których tam mówiłem.

1. Sznurek godzinny to taki sznurek, który po zapaleniu spala się przez równą godzinę – ale nierównomiernie i nie wiadomo jak. Czy można ugotować jajko, które nie może gotować się krócej niż 7 minut i dłużej niż 8 minut, mając do dyspozycji trzy sznurki godzinne, kuchenkę gazową, rondelek i wodę?

2. Ile wynosi suma współczynników wielomianu

$$W(x) = (2x^2 - 3x + 1)^{2011} - (x^3 - 9x^2 + 5x + 3)^{2011} + (x^2 + x - 3)^{2011}?$$

3. Miary kątów w trójkącie mają się jak $1:5:6$. Najdłuższy bok trójkąta to 6. Ile wynosi wysokość opuszczona na ten bok?

4. Na Wyspie Zagadkowej (jest to wyspa powstała mniej więcej 40 lat temu w *Rozkoszach Łamania Głowy* Lecha Pijanowskiego) mieści się ogród zoologiczny. Nie było w nim słonia. Dyrektor ZOO poprosił zatem listownie znanego łowcę zwierząt o dostarczenie słonia. Parę tygodni później łódź łowcy zwierząt ze słoniem na pokładzie przybiła do brzegu. Cena słonia, zależna od wagi, wydała się dyrektorowi mocno wygórowana. Na Wyspie Zagadkowej były jednak jedynie niewielkie wagi towarowe, nie było wagi, na której zmieściłby się słoń. Czy dyrektor mógł zważyć słonia i sprawdzić, czy łowca go nie oszukuje?

5. Ile, co najwyżej, ścian czworościanu może być trójkątami rozwartokątnymi?

6. Liczba $9999\ldots9999$ jest zapisana za pomocą 999 dziewiątek. Ile wynosi suma cyfr kwadratu tej liczby?

7. Ile rozwiązań ma układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2011? \end{cases}$$

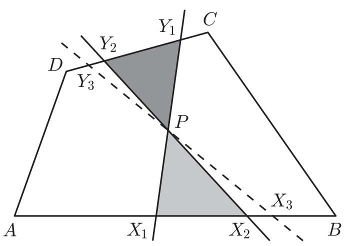
8. Ile jest prostych dzielących trójkąt o bokach 2010, 2011, 2012 na dwa trójkąty o równych polach?

9. Czy można stwierdzić, czy liczba ludzi, którzy uścisnęli dłonie nieparzystej liczby ludzi (w całej dotychczasowej historii Ziemi), jest parzysta czy nieparzysta? Jeśli można, to jaka jest ta liczba?

Często urok zadania można docenić dopiero wtedy, gdy się nad tym zadaniem trochę (być może „całkiem spore trochę”) myślało. Na konferencji można było uczestników do tego zachęcić, wręczając im kartkę z tematami zadań wieczorem, w przeddzień referatu. W tekście wydrukowanym w miesięczniku – zamieszczone odpowiedzi często wręcz kuszą, by na nie rzucić okiem.

Delta rozwiązuje ten problem znakomitym pomysłem „druku lustrzanego”. Dzięki temu wcale nie jest tak łatwo przeczytać rozwiązanie, nawet jeśli niechcący (lub pozornie niechcący) się na nie spojrzy... Zastosujemy tę metodę i tu, a dodatkową „pomocą” niech będzie fakt, że podane zostaną nie tyle pełne rozwiązania, co szkice czy istotne wskazówki (ale do rozwiązania raczej wystarczające). Nie będzie też rysunków, jako że lustrzane odbicie rysunku wygląda nad wyraz podobnie do oryginału. Mam jednak do Czytelników prośbę – by po lusterko sięgnęli dopiero w ostateczności. Wielką radość może sprawić satysfakcja osiągnięta dzięki samodzielnemu rozwiązaniu niestandardowego zadania. Na wszelki wypadek, by pokusa nie była zbyt wielka, wskazówki owe będą rozsiane po całym numerze.

Rozwiązanie zadania M 1351.
Załóżmy najpierw, że istnieje punkt P o podanej własności. Poprowadźmy przez niego dwie proste. Jedna przecina boki AB i CD odpowiednio w punktach X_1 i Y_1, a druga – w punktach X_2 i Y_2.



Mamy

$$[AX_1PY_2D] + [PX_1X_2] = [AX_2Y_2D] = \frac{1}{2}[ABCD] = [AX_1Y_1D] = [AX_1PY_2D] + [PY_1Y_2],$$

gdzie $[\mathcal{F}]$ oznacza pole figury $\mathcal{F}$. Zatem

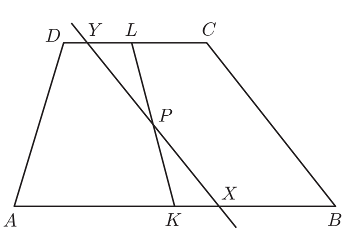
$$\frac{1}{2}PX_1 \cdot PX_2 \cdot \sin\sphericalangle X_1PX_2 = [PX_1X_2] = [PY_1Y_2] = \frac{1}{2}PY_1 \cdot PY_2 \cdot \sin\sphericalangle Y_1PY_2,$$

a stąd $PX_1 \cdot PX_2 = PY_1 \cdot PY_2$. Prowadząc przez P trzecią prostą, przecinającą AB i CD odpowiednio w punktach X_3 i Y_3, otrzymamy $PX_2 \cdot PX_3 = PY_2 \cdot PY_3$. Dzieląc stronami ostatnie dwie równości, otrzymamy

$$\frac{PX_1}{PX_3} = \frac{PY_1}{PY_3},$$

co wobec twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa implikuje, że $X_1X_3 \parallel Y_1Y_3$, tzn. $AB \parallel CD$.

Odwrotnie, niech $AB \parallel CD$. Niech K i L będą odpowiednio środkami boków AB i CD. Niech P będzie środkiem odcinka KL.



Z wypukłości czworokąta $ABCD$ wynika, że punkt P leży w jego wnętrzu. Oczywiście $[AKLD] = \frac{1}{2}[ABCD]$ i $[PKX] = [PLY]$ dla dowolnej prostej przechodzącej przez P i przecinającej odcinki AB, CD odpowiednio w punktach X, Y. Zatem P ma własność, o której mowa w treści zadania.