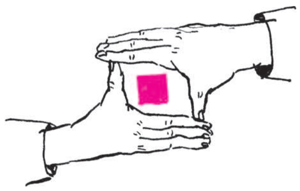
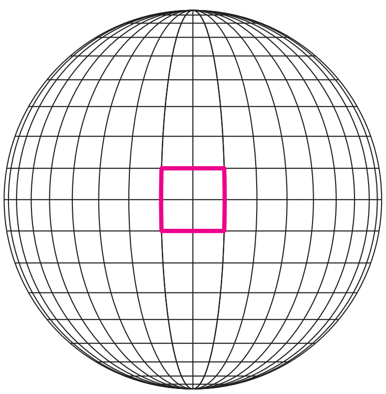
Kwadrat, którego nie ma

Piotr KOPACZ *



Przemieszczając się na płaszczyźnie za pomocą ruchów „do przodu”, „do tyłu”, „w lewo” i „w prawo”, możemy w szczególności narysować kwadrat. Czy analogiczna sytuacja rozważana na zakrzywionej powierzchni zawsze pozwala na wygenerowanie kwadratu przez zakreślaną trajektorię? Rozważmy sferę, którą często wykorzystuje się w globalnym modelowaniu powierzchni Ziemi.

Na początek zwróćmy uwagę na to, iż w płaskiej geometrii euklidesowej – czyli takiej, jakiej uczymy się w szkole – kwadrat możemy określić w szczególności również jako
- czworokąt foremny;
- prostokąt, którego wszystkie boki mają równe długości;
- romb, którego wszystkie kąty są przystające.



Rys. 1. Figura sferyczna F_1 o czterech równych bokach i czterech kątach prostych.

Dla każdego niemal ucznia jest oczywiste, iż każdy kwadrat ma cztery boki równej długości oraz wszystkie kąty wewnętrzne proste. Czy na sferze znajdziemy figurę (sferyczną) mającą takie same cechy? Spróbujmy poruszać się po czterech tzw. kierunkach kardynalnych, tzn. „na północ”, „na południe”, czyli wzdłuż południków, oraz „na wschód”, „na zachód”, czyli wzdłuż równoleżników sfery. Zauważmy, że na sferze o ustalonym promieniu wszystkie południki mają taką samą długość równą połowie długości równika. Z kolei długości równoleżników nie są stałe. Najdłuższy z nich to równik, a gdy zbliżamy się do biegunów sfery, ich długości zmniejszają się. Czy, wiedząc powyższe, możemy już narysować na sferze figurę spełniającą nasze wymagania? Za pomocą samych południków i równoleżników możemy przedstawić (rys. 1) figurę sferyczną F_1 o czterech bokach równej długości i czterech kątach prostych. Wszak każdy południk przecina każdy napotkany równoleżnik pod kątem prostym i odwrotnie. A sama konstrukcja polegać może na tym, że boki południkowe o ustalonej długości rozsuwamy o tyle, aby długość każdego z nich była równa długości boków leżących na równoleżnikach symetrycznych względem równika.

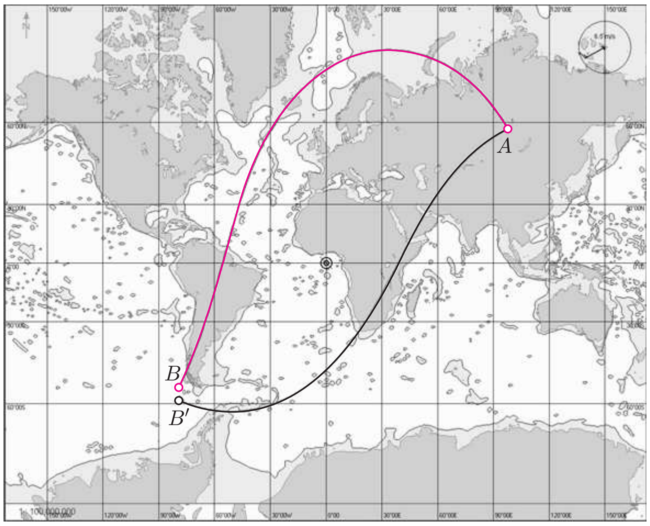
Punkty przecięcia ortogonalnych, czyli wzajemnie prostopadłych linii siatki stanowią wierzchołki figur sferycznych o czterech bokach, co możemy zaobserwować np. w logo Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego (rys. 2).

Rys. 2. Siatka południków i równoleżników, generująca czworoboczne figury sferyczne, widoczna w logo IM UJ.

Czy otrzymaną sferyczną figurę F_1 o czterech bokach równej długości i czterech kątach prostych możemy bezspornie nazwać kwadratem (sferycznym)? Otóż nie. Zauważmy, iż boki kwadratu na płaszczyźnie są odcinkami linii prostych, a mówiąc ogólniej – odcinkami linii geodezyjnych. Stanowią one zatem najkrótsze połączenie wierzchołków kwadratu na powierzchni, na której leżą – płaszczyźnie. Tymczasem w rozważanej przez nas figurze na sferze boki, będące łukami równoleżników, nie są najkrótszym połączeniem punktów wierzchołkowych F_1, ponieważ równoleżniki, będące okręgami małymi sfery, nie są sferycznymi prostymi (geodezyjnymi sfery).

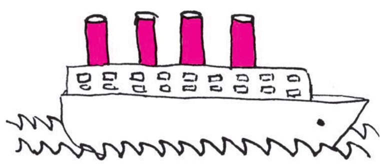
Tym razem trudno byłoby znaleźć wierny odpowiednik F_1 na płaszczyźnie, jako że oba obiekty pochodzą z różnych geometrycznych światów, w których rządzą różne prawa. Jako płaski „wzorzec” bądź odpowiednik otrzymanej sferycznej figury F_1 można poniekąd rozważyć figurę płaską o jednej parze przeciwległych boków prostych i drugiej parze boków krzywoliniowych tej samej długości.

* Wydział Nawigacyjny,
Akademia Morska w Gdyni



Rys. 3

A zatem w dalszych naszych poszukiwaniach uwzględniać będziemy tylko takie figury sferyczne, których boki są odcinkami linii prostych. Odcinkami prostych na sferze są łuki okręgów wielkich, a więc w szczególności są nimi wszystkie południki, jak i równik będący całą prostą (zamkniętą, o skończonej długości). Para boków południkowych figury F_1 spełnia nasze wcześniejsze wymagania. Spróbujmy więc wyprostować jej boki równoleżnikowe. W efekcie kolejne boki naszego czworokąta stanowić będą odcinki linii geodezyjnych. Warto zauważyć, że na sferze krótszy łuk okręgu wielkiego, łączącego dwa dowolne punkty o różnej długości geograficznej i leżące w tej samej półsferze, „wygina się” w kierunku bliższego bieguna. Na rysunku 3 przedstawiono przykładowy przebieg linii geodezyjnych sfery na płaskiej mapie w konforemnym (czyli zachowującym wierność kątów) odwzorowaniu Merkatora.



Tak przedstawianą mapę bardzo często możemy znaleźć, na przykład, w urządzeniach nawigacyjnych oraz współczesnym systemie map elektronicznych, tj. ECDIS (*Electronic Chart Display and Information System*) stanowiącym morską aplikację systemu GIS (*Geographic Information System*). System ten jest używany na statkach morskich do planowania i realizacji podróży w żegludze międzynarodowej oraz jest obecnie prawnie dopuszczonym ekwiwalentem nawigacyjnych map papierowych stosowanych od stuleci do dnia dzisiejszego. W obrazie tym linia łuku okręgu wielkiego po przejściu przez równik zaczyna wyginać się w kierunku bliższego bieguna. Można powiedzieć, że punkt przecięcia obrazu linii prostej z równikiem sfery na płaskiej mapie, wykonanej w odwzorowaniu Merkatora, jest punktem przegięcia płaskiej krzywej będącej obrazem prostej sferycznej. Jako przykład rozważmy dwa punkty A (wyjściowy) i B (docelowy) na powierzchni Ziemi odległe o około 19800 km, czyli nieco mniej niż wynosi długość ziemskiego południka. Następnie przesuńmy punkt B po południku o $4°$ szerokości geograficznej na południe, czyli o około 440 km, otrzymując punkt B'. Połączmy punkt A z B (kolorowa linia) oraz A z B' (czarna linia) najkrótszymi drogami, czyli za pomocą odcinków prostych modelowanej powierzchni, jak to widać na rysunku 3. Odległość BB' stanowi zaledwie około 2,2% odległości AB'. Mimo względnie małej różnicy odległości w położeniu punktów docelowych B i B' przebieg obydwu odcinków linii prostych AB i AB' istotnie się różni.

Po małej modyfikacji otrzymujemy czworokąt sferyczny o czterech równych bokach, które są tym razem odcinkami prostych. Oznaczmy go jako F_2. Zauważmy jednak, że kąty wewnętrzne F_2 nie są teraz proste – pary przeciwległych jego boków nie przecinają się prostopadle jak południk z równoleżnikiem. Kąty wewnętrzne F_2 zmieniają się w zależności od wielkości czworokąta, czyli – inaczej mówiąc – zależą od długości jego boku. Na sferze istnieje zatem czworokąt foremny o kątach wewnętrznych dowolnie wziętych z przedziału $(90°, 180°)$. Możemy go podzielić na cztery przystające czworokąty, ale wówczas nie są one już foremne – nie mają wszystkich boków i kątów równych. W konsekwencji nie nadają się one do pomiaru pola na sferze w ten sposób, jak kwadraty na płaszczyźnie. Widzimy, iż suma miar kątów wewnętrznych czworokąta na sferze nie jest stała (na dodatek większa niż $360°$).

Przy okazji Czytelnik może zastanowić się nad powstającymi tu pytaniami. Czy można pokryć całą sferę przystającymi wielokątami foremnymi, a w szczególności czworokątami? Jeśli tak, to ile wynosi długość boku i miara kąta wewnętrznego takich wielokątów foremnych, a w szczególności czworokątów? Szukając odpowiedzi, na początek można zacząć od trójkątów.

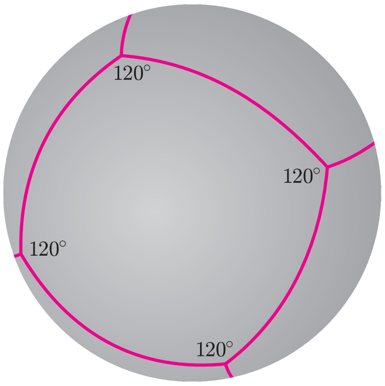
Rozwiązanie zadania F 811.
Energia potencjalna przy powierzchni planety $E_p = -mv_{II}^2/2$. Z zasady zachowania energii wynika zatem, że

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + E_p,$$

gdzie v jest szukaną prędkością w nieskończoności, a v_0 prędkością wystrzelenia pocisku na powierzchni planety. Stąd

$$v = \sqrt{v_0^2 - v_{II}^2} \approx 9{,}5 \text{ km/s}.$$

I tak, na przykład, osiem równobocznych i równokątnych zarazem trójkątów prostokątnych, z których każdy ma trzy kąty proste, a każdy bok ma w mierze kątowej długość 90°, pokrywa całą sferę. Obrazowo, sytuacja taka ma miejsce, gdy weźmiemy pod uwagę trzy okręgi wielkie leżące we wzajemnie prostopadłych płaszczyznach. Punkty ich przecięcia wyznaczają wierzchołki owych ośmiu trójkątów sferycznych. Czytelnik Wnikliwy zauważy, że foremny trójkąt na sferze może mieć różną miarę kąta wewnętrznego, a same trójkąty nie są wielokątami o minimalnej liczbie boków, jakie występują na sferze, co także istotnie różni się od sytuacji, z jaką mamy do czynienia na płaszczyźnie.



Rys. 4. Sześcian sferyczny.

Rozważmy teraz sferyczny czworokąt foremny F_3 o kącie 120°, który przedstawia rysunek 4. Czy tym razem możemy nazywać go sferycznym kwadratem? Gdyby podzielić sferę na sześć takich właśnie przystających obszarów, to można by ją wówczas określić mianem sferycznego sześcianu bądź sferycznej kostki. Każda ze ścian zwykłego (euklidesowego) sześcianu jest przecież kwadratem. Załóżmy, że każda z jego „ścian" ma inny kolor albo przypisaną różną liczbę oczek, jak tradycyjna kostka do gry. Taką kostkę moglibyśmy także wykorzystać do gry, biorąc za wyrzuconą liczbę oczek wartość z tej jej ściany, do której należy punkt styczności sfery z powierzchnią, na której się zatrzyma lub jego punkt antypodyczny (przeciwległy), który łatwiej nam zobaczyć z góry. Jako zadanie dla Czytelnika pozostawiam znalezienie kątowej długości „krawędzi" takiej kostki, czyli długości boku rozważanego czworokąta.

Nasuwa się wniosek, iż nie istnieje na sferze czworokąt foremny o kątach prostych jak kwadrat na płaszczyźnie. Przypomnijmy – w płaskiej geometrii euklidesowej „bycie czworokątem foremnym" oznacza „bycie kwadratem". Wychodząc poza tę geometrię, widzimy, że takiej równoważności pojęć wcale być już nie musi. Nie możemy więc znaleźć sferycznego odpowiednika płaskiego kwadratu, który miałby dokładnie takie same własności, ponieważ nie istnieje on na sferze. Ale czy jest w tym coś złego? Po prostu jest inaczej. W zasadzie jest kwestią umowy to, czy można używać określenia „kwadrat sferyczny" dla F_3 o kącie wewnętrznym 120°, mając świadomość tego, że jego cechy są po prostu nieco inne niż kwadratu na płaszczyźnie.

Zauważmy także, że tradycyjnie jako punkt wyjścia w poszukiwaniu geometrycznych odpowiedników przyjmuje się płaską geometrię euklidesową. Porównuje się z nią i tradycyjnymi pojęciami, prawami w niej uformowanymi, obiekty i prawa innych geometrii, których odpowiedniki nie zawsze istnieją albo się istotnie różnią.

Z kolei wychodząc, na przykład, z geometrii sferycznej i ją traktując jako punkt odniesienia, można by się zastanowić, jak nazwać figurę dobrze nam znaną jako płaski kwadrat. O płaskim euklidesowym kwadracie jedna z definicji, jaką możemy spotkać w literaturze, mówi, iż jest to czworokąt foremny. Czy foremność czworokąta implikuje miarę jego kątów wewnętrznych (prostych na płaszczyźnie) jako jego szczególną własność, czy też miara 90° jego kątów jest fundamentalną częścią definicji kwadratu?

I na koniec mała refleksja. W związku ze zbliżającymi się mistrzostwami Europy w piłce nożnej „Euro 2012" zapewne wielu Czytelników zaglądać będzie na boiska. Przyjmując, iż przynajmniej w części są one położone na zakrzywionej powierzchni, np. dla uproszczenia weźmy rozważaną przez nas sferę, to tak naprawdę nie są one wówczas prostokątami. A to już niemal skandal! Jeśli linie ograniczające pole boiska nie są odcinkami prostych, ale przecinają się pod kątem 90° (sytuacja analogiczna jak w F_1), to w szczególności wymiary boiska (liczone liniowo) nie są stałe. Z kolei jeśli linie te są odcinkami prostych (sytuacja analogiczna jak w F_2), to w szczególności kąty narożników boiska, z których wykonuje się rzuty rożne, nie są proste. Ciekawe, co na to przepisy, trenerzy reprezentacji i sami zawodnicy?

Rozwiązanie zadania F 812.
Równania ruchu gwiazd:

$$m_1\omega_1 l_1 = m_2\omega_2 l_2 = F_g,$$

gdzie ω_1, ω_2 są prędkościami kątowymi ruchu gwiazd, $F_g = Gm_1m_2/l^2$ siłą wzajemnego przyciągania, l_1 i l_2 promieniami orbit. Środek masy znajduje się w punkcie takim, że $m_1l_1 = m_2l_2$ oraz $l_1 + l_2 = l$. Stąd otrzymujemy:

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{G(m_1+m_2)/l^3},$$

oraz

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l^3}{G(m_1+m_2)}}.$$