Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 625 ($WT = 1{,}90$) i 626 ($WT = 2{,}83$) z numeru 9/2011

Janusz Olszewski	Warszawa	44,62
Paweł Kubit	Kraków	40,94
Tomasz Tkocz	Rybnik	39,93
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Roksana Słowik	Knurów	34,62
Jerzy Cisło	Wrocław	32,84
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	31,04

Janusz Olszewski – po raz trzynasty!! No cóż...

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 641, 642

Redaguje Marcin E. KUCZMA

641. Na płaszczyźnie dane są punkty A, B. Rozważamy wszystkie czworokąty wypukłe $ABCD$, położone w ustalonej półpłaszczyźnie o krawędzi AB, symetryczne względem prostej BD, z kątem prostym przy wierzchołku D. Wykazać, że istnieje punkt wspólny wszystkich uzyskanych prostych CD.

642. Dana jest liczba naturalna nieparzysta n. Ala i Bartek grają w grę, wykonując ruchy na przemian. Stan gry jest liczbą całkowitą i zmienia swą wartość w trakcie gry. Gracz, do którego należy ruch, może do tej liczby zastosować jedną z dwóch operacji: odjąć od niej dowolną dodatnią liczbę całkowitą, mniejszą niż n, albo podzielić ją przez n i zaokrąglić wynik do najbliższej liczby całkowitej (wobec nieparzystości n, kierunek zaokrąglenia jest zawsze dobrze określony). Powstała nowa wartość przechodzi do dyspozycji przeciwnika. Wygrywa, kto pierwszy uzyska wartość 0. Rozpoczyna Ala, startując od liczby n^n. Kto ma strategię wygrywającą?

Zadanie 642 zaproponował pan Wojciech Nadara z Warszawy

Rozwiązania zadań z numeru 1/2012

Przypominamy treść zadań:

633. Każdy punkt płaszczyzny został pokolorowany na czerwono lub zielono. Dany jest trójkąt ABC. Dowieść, że istnieje trójkąt przystający do ABC o wszystkich wierzchołkach zielonych lub istnieje odcinek długości jednostkowej o obu końcach czerwonych.

634. Niech S będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje wielomian stopnia pierwszego, o współczynnikach całkowitych, którego wartości w punktach zbioru S są parami względnie pierwsze.

633. Załóżmy, że trójkąt przystający do ABC, o wszystkich wierzchołkach zielonych, nie istnieje. Rozważymy trzy przypadki.

Jeżeli istnieje trójkąt przystający do ABC, o wszystkich wierzchołkach czerwonych – nazwijmy go po prostu ABC – przesuwamy go o dowolny wektor długości 1. Otrzymujemy trójkąt $A'B'C'$, który (w myśl przyjętego założenia) ma co najmniej jeden wierzchołek czerwony. Wraz z odpowiednim punktem z trójki A, B, C tworzy on czerwoną parę punktów odległych o 1.

Jeżeli istnieje trójkąt przystający do ABC (ponownie nazwijmy go ABC), w którym dokładnie jeden wierzchołek – na przykład A – jest zielony, rysujemy dowolny trójkąt równoboczny $AA'A''$ o boku długości 1. Przesuwamy trójkąt ABC o wektory $\overrightarrow{AA'}$ i $\overrightarrow{AA''}$, otrzymując trójkąty $A'B'C'$ i $A''B''C''$. Gdy któryś z punktów B', C', B'', C'' jest czerwony, mamy tezę. Gdy te cztery punkty są zielone, wówczas (znów na mocy przyjętego założenia) punkty A', A'' muszą być czerwone, co też daje tezę.

Pozostaje przypadek, gdy w każdym trójkącie przystającym do ABC dokładnie jeden wierzchołek jest czerwony. Ustalmy dowolny czerwony punkt O na płaszczyźnie i narysujmy dowolny trójkąt przystający do ABC (ponownie nazwijmy go ABC), z wierzchołkiem B w owym punkcie O. Punkty A, C są więc zielone. Uzupełniamy trójkąt ABC do równoległoboku $ABCD$; trójkąt CDA przystaje do ABC, więc punkt D musi być czerwony. Długość d odcinka BD jest liczbą określoną jednoznacznie przez zadany trójkąt ABC (to podwojona długość środkowej z wierzchołka B). Z dowolności usytuowania trójkąta ABC (z wierzchołkiem $B = O$) wynika, że każdy punkt położony w odległości d od punktu O jest czerwony.

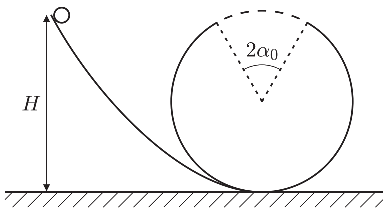
Ponieważ punkt O mógł być dowolnym punktem czerwonym, widzimy, że każdy odcinek długości d, z jednym końcem czerwonym, ma i drugi koniec czerwony. Krokiem długości d można połączyć każde dwa punkty płaszczyzny – cała płaszczyzna jest więc czerwona. To oczywiście także daje tezę.

634. Niech $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ będzie zadanym zbiorem liczb całkowitych. Określamy liczbę A jako iloczyn wszystkich różnic $x_i - x_j$, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Pokażemy, że wielomian $W(x) = Ax + 1$ spełnia wymagany warunek.

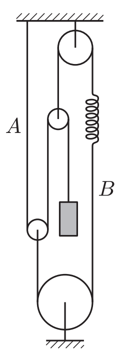
Przypuśćmy, że pewne dwie wartości $W(x_k)$, $W(x_l)$ mają wspólny dzielnik pierwszy $p \geqslant 2$. Liczba p jest wówczas także dzielnikiem różnicy $W(x_k) - W(x_l)$, równej $A \cdot (x_k - x_l)$. Skoro p jest liczbą pierwszą, musi dzielić jeden z czynników: A lub $(x_k - x_l)$. Ten drugi czynnik jest też dzielnikiem liczby A, więc, tak czy inaczej, p dzieli A. To już jest oczekiwana sprzeczność, bo liczby $W(x_k)$ oraz Ax_k, różniące się o 1, nie mogą być jednocześnie podzielne przez p.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 2012



Rys. 1



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 526 ($WT = 2{,}35$) i 527 ($WT = 4{,}00$) z numeru 11/2011

Marian Łupieżowiec	Gliwice	39,60
Jacek Piotrowski	Rzeszów	39,10
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	35,03
Michał Koźlik	Gliwice	33,02
Krzysztof Magiera	Łosiów	19,37

Zadania z fizyki nr 538, 539

Redaguje Ewa CZUCHRY

538. Małe ciało porusza się po torze z „martwą pętlą”, której na górze brakuje łuku $2\alpha_0$ (rys. 1). Z jakiej wysokości H powinno wystartować ciało, żeby oderwawszy się na początku wyrwy nie wypaść poza nią?

539. Długa cylindryczna cewka nakręcona na rdzeń o średnicy D_1 ma indukcyjność L_1. Po podłączeniu cewki do źródła prądu wewnątrz niej zostało wyindukowane pole magnetyczne o indukcji B_1. Następnie cewka została nakręcona na inny rdzeń o średnicy D_2. Indukcyjność cewki była wtedy równa L_2. Wyznaczyć indukcję pola magnetycznego B_2 wewnątrz nowej cewki po podłączeniu do tego samego źródła prądu. Założyć, że przewodnik, z którego jest zrobiona cewka, jest dużo dłuższy niż długość cewki.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2012

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

530. Ciężarek o masie m wisi na nici A przełożonej przez 2 bloki ruchome (rys. 2). Osie tych bloków są połączone nicią B przełożoną przez 2 bloki nieruchome, a w tej nici zamontowana jest sprężynka o stałej sprężystości k. Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka. Masy bloków pominąć.

531. Gdy transformator był podłączony uzwojeniem pierwotnym do napięcia przemiennego U_1, a obwód wtórny był otwarty, napięcie na uzwojeniu wtórnym było równe U_2, a natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym I_1 (wszystkie podane wielkości są wartościami skutecznymi). Zamknięto obwód wtórny, dołączając do niego: a) opornik, b) zwojnicę bezoporową, c) kondensator. Ile w każdym z tych przypadków wyniesie natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym, jeśli we wtórnym popłynie prąd o natężeniu I_2? Oba napięcia U_1 i U_2 nie zmieniły wartości, a straty energii w transformatorze (jego nagrzewanie się) można pominąć.

530. Drganie ciężarka wystąpi wtedy, gdy bloki ruchome będą się zbliżać do siebie i oddalać (oprócz tego w układzie występuje drugi stopień swobody – zgodny ruch bloków ruchomych, przy stałym położeniu ciężarka i stałej sile naciągu nici). Jeśli górny blok ruchomy przesunie się w górę o z, a dolny pozostanie nieruchomy, to ciężarek przesunie się w górę o $x = 2z$. Przy tym sprężynka ulegnie skróceniu o z, czyli siła wywierana przez nić B zmniejszy się o kz. Siła napięcia nici A jest dwukrotnie mniejsza, zatem zmniejszy się ona o $\frac{1}{2}kz = \frac{1}{4}kx$, tak jakby ciężarek wisiał na sprężynce o stałej sprężystości $k' = \frac{1}{4}k$. Szukany okres drgań jest opisany wyrażeniem

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

531. Oznaczmy przez L_1 i L_2 indukcyjności uzwojenia pierwotnego i wtórnego, a przez M współczynnik indukcji wzajemnej. Równania wyrażające II prawo Kirchhoffa dla obu obwodów przybierają postać

$$U_1 = -L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}, \qquad U_2 = -M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}.$$

W powyższych równaniach symbole U i I oznaczają – niezbyt konsekwentnie – wartości chwilowe, w odróżnieniu od dalszych przekształceń i treści zadania.

Brak zmiany napięcia U_2, mimo zamknięcia obwodu wtórnego, świadczy o tym, że sprzężenie indukcyjne obwodów jest maksymalne, tzn. $M = \sqrt{L_1L_2}$. Wtedy stosunek U_2/U_1 jest równy $\sqrt{L_2/L_1}$, zatem stały. Przyjmując częstość ω jako daną, z danych wartości U_1, U_2 i I_1 wyznaczamy (dla $I_2 = 0$)

$$L_1 = \frac{U_1}{I_1\omega}, \qquad L_2 = \frac{U_2^2}{U_1I_1\omega}, \qquad M = \frac{U_2}{I_1\omega}.$$

Szukane natężenie prądu w obwodzie pierwotnym po dołączeniu obciążenia do obwodu wtórnego oznaczymy jako I_1'. W przypadku a) należy przyrównać U_2 do I_2R, co po wyeliminowaniu przesunięcia fazy między I_1' a I_2 prowadzi do tożsamości

$$M\omega I_1' = I_2\sqrt{(L_2\omega)^2 + R^2}.$$

Podstawienie do tego równania oporności w postaci $R = U_2/I_2$ oraz wyrażeń na M i L_2 daje szukane natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym

$$I_1' = \sqrt{I_1^2 + \left(\frac{U_2I_2}{U_1}\right)^2}.$$

W podobny sposób otrzymujemy dla przypadku b) $I_1' = I_1 + \dfrac{U_2I_2}{U_1}$,

a dla przypadku c) $I_1' = \left|I_1 - \dfrac{U_2I_2}{U_1}\right|$. Zauważmy, że dla dużego obciążenia (dużej wartości I_2) we wszystkich przypadkach przechodzimy do powszechnie znanego związku $I_1' = U_2I_2/U_1$.