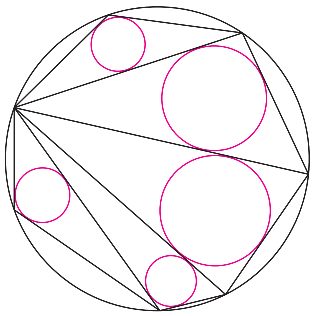
Japońska geometria świątynna

Anna DYMEK

Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej srebrnym medalem w XXXIII Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 2011 roku (Łódź).

Połączenie matematyki z religią może wydawać się nam, Europejczykom, dość zaskakujące. W Japonii jednak przez bardzo długi czas nie było niczym niezwykłym. Zjawisko to zostało zapoczątkowane w XVII wieku, kiedy władcy tego kraju podjęli decyzję o zamknięciu portów i odcięciu Japonii od reszty świata, szczególnie od Europy Zachodniej, a trwało do XIX wieku. W tym czasie w Kraju Kwitnącej Wiśni nastąpił znaczny rozwój kultury, sztuki i nauki – także matematyki. Do dziś zachowało się wiele eksponatów pochodzących ze świątyń Shinto, obowiązującej wówczas religii. Są to drewniane tabliczki z kolorowymi rysunkami, przedstawiającymi ułożone na różne sposoby figury geometryczne. Szczególnie wiele jest tam okręgów stycznych do różnych figur, często do innych okręgów. Te obrazki to *sangaku* – w dosłownym tłumaczeniu „matematyczne tabliczki”.



Rys. 1

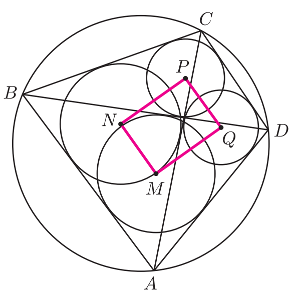
Sangaku to w istocie zadania z geometrii euklidesowej. Część z nich nie ma nawet polecenia – odgadnięcie go jest częścią zagadki. Inne jednak opisano w Kanbun, czyli piśmie używającym ideogramów chińskich, a czytanym po japońsku. Kanbun miał podobną rangę jak łacina na Zachodzie, był językiem ludzi mających wyższe wykształcenie. Stąd wniosek, że tworzyli i rozwiązywali te sangaku głównie obywatele z klasy samurajów. Cele tworzenia sangaku były dwojakie: wysiłek włożony w rozwiązanie ofiarowywano opiekuńczym duchom, a wisząca w świątyni tabliczka stawała się wyzwaniem dla innych.

Triangulacja wielokąta to podział na trójkąty dokonany przez wybór niektórych przekątnych w taki sposób, żeby żadne dwie z wybranych nie przecinały się w punktach innych niż wierzchołki tego wielokąta.

Prawdopodobnie najbardziej znanym na Zachodzie sangaku pozostaje tzw. japońskie twierdzenie o wielokącie wpisanym w okrąg, występujące nawet pod nazwą „sangaku” w *Kąciku olimpijskim* (zob. [1]).

Sangaku 1. *Suma promieni okręgów wpisanych we wszystkie trójkąty pewnej triangulacji wielokąta wpisanego w okrąg jest stała dla danego wielokąta i niezależna od triangulacji* (*rys.* 1).

Dowód tego twierdzenia także znajduje się w *Kąciku olimpijskim*, nie będę go więc tu przytaczać.

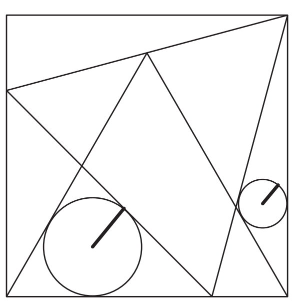


Rys. 2

Jedno sangaku pojawiło się nawet na Asian Pacific Mathematics Olympiad w 1996 r. Znane jest ono jako japońskie twierdzenie o czworokącie wpisanym w okrąg.

Sangaku 2. *Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Wówczas środki M, N, P, Q okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty DAB, ABC, BCD, CDA tworzą prostokąt* (*rys.* 2).

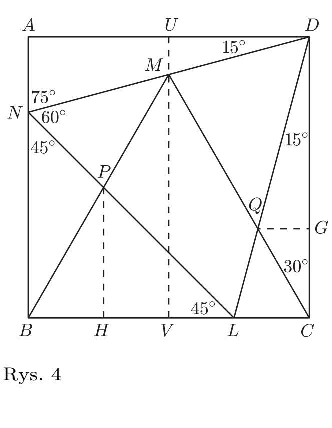
Przy dowodzie tego twierdzenia najpierw wykazujemy, że na czwórkach punktów złożonych z dwóch środków okręgów wpisanych i dwóch odpowiednio do nich dobranych wierzchołków czworokąta (np. na czwórce M, N, A, B) można opisać okrąg. Następnie bierzemy dwa takie okręgi (np. opisane na punktach A, B, N, M oraz D, A, M, Q) i wykazujemy, że odpowiedni kąt (w naszym przykładzie kąt NMQ) jest kątem prostym. Całość dowodu to proste rachunki na kątach w okręgu, które pozostawiam Czytelnikowi do sprawdzenia.



Rys. 3

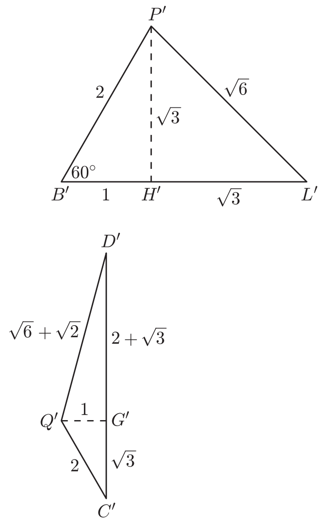
Aby ukazać specyfikę zadań sangaku, przedstawię tu rozwiązanie jednego z nich w całości.

Sangaku 3. *Dane są dwa trójkąty równoboczne wpisane w kwadrat oraz dwa okręgi wpisane w wybrane z powstałych trójkątów, jak pokazuje rysunek* 3. *Należy znaleźć zależność między promieniami tych okręgów.*

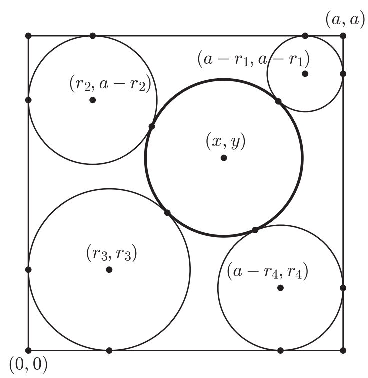


Rys. 4

Przyjmijmy oznaczenia wierzchołków i punktów przecięcia odcinków jak na rysunku 4. Weźmy ponadto punkty H, V, U i G, będące rzutami prostokątnymi, odpowiednio, punktu P na BC, M na BC i AD oraz Q na DC, i oznaczmy znane kąty. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że długości boków kwadratu są równe 2, czyli $AB = BC = CD = AD = BM = CM = 2$. Wtedy wysokość MV trójkąta równobocznego MBC ma długość $\sqrt{3}$, a zatem $MU = 2 - \sqrt{3}$.

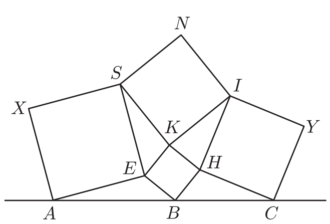


Rys. 5



Rys. 6

$d(\omega_1, \omega_2)$ to długość odcinka między punktami styczności okręgów ω_1 i ω_2 do ich wspólnej zewnętrznej stycznej.



Rys. 7

Z podobieństwa trójkątów DAN oraz DUM mamy $AN = 2(2-\sqrt{3})$, stąd $BN = BL = 2(\sqrt{3}-1)$.

Obliczymy teraz długości promieni zaznaczonych okręgów. Będziemy korzystać ze wzoru $r = \frac{2S}{L}$, gdzie S, L i r to odpowiednio pole trójkąta, jego obwód i promień okręgu wpisanego. Aby uprościć te obliczenia, wykonamy je dla okręgów wpisanych w trójkąty podobne do BPL oraz QCD. Rozważmy trójkąty $B'P'L'$ oraz $Q'C'D'$, takie że $B'H'$ oraz wysokość $Q'G'$ mają długość 1, jak na rysunku 5. Wtedy promień r' okręgu wpisanego w trójkąt $B'P'L'$ ma długość

$$r' = \frac{\sqrt{3}\cdot(1+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3}+\sqrt{6})} = \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Promień r_1 okręgu wpisanego w trójkąt BPL ma się do r' tak, jak BL do $B'L'$, a ponieważ

$$\frac{BL}{B'L'} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{3}} = 2(2-\sqrt{3}),$$

więc

$$r_1 = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Analogicznie obliczamy

$$r_2 = \frac{2}{4+2\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{2}}.$$

Po wykonaniu kilku przekształceń dochodzimy do wniosku, że $r_1 = 2r_2$.

Jest to jedno z bardziej typowych sangaku. Jak widać, rozwiązanie zawiera parę pomysłów i raczej żmudne obliczenia, ale nie korzysta z wyszukanych metod i nie wymaga niczego więcej niż podstawowa wiedza z zakresu planimetrii.

W *Delcie* 9/2011 w dziale Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej można przeczytać o twierdzeniu Caseya. Przypomnę w tym miejscu jego uproszczoną wersję, gdyż posłuży nam ona do rozwiązania następnego sangaku.

Twierdzenie Caseya. *Jeśli okręgi ω_A, ω_B, ω_C, ω_D są styczne do okręgu ω w punktach A, B, C i D (wszystkie wewnętrznie lub wszystkie zewnętrznie) oraz czworokąt $ABCD$ wpisany w okrąg ω jest wypukły, to spełniona jest równość:*

$$d(\omega_A,\omega_C)\cdot d(\omega_B,\omega_D) = d(\omega_A,\omega_B)\cdot d(\omega_C,\omega_D) + d(\omega_B,\omega_C)\cdot d(\omega_A,\omega_D).$$

Sangaku 4. *Wewnątrz kwadratu o boku długości a znajduje się okrąg ω. Okrąg ten nie ma punktów wspólnych z brzegiem kwadratu. Cztery okręgi ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 o różnych promieniach są styczne do okręgu ω oraz każdy z nich jest styczny do dwóch boków kwadratu (rys. 6). Wyznacz długość boku kwadratu w zależności od promieni okręgów ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.*

Zadanie to najłatwiej rozwiązać, zapisując równość wynikającą z twierdzenia Caseya. Długości interesujących nas odcinków można wyznaczyć, używając twierdzenia Pitagorasa i odejmując długości odpowiednich promieni od długości boku kwadratu. W ten sposób otrzymujemy równanie

$$(a-r_1-r_2)(a-r_3-r_4) + (a-r_2-r_3)(a-r_1-r_4) =$$
$$= \sqrt{2\cdot(a-r_1-r_3)^2-(r_3-r_1)^2}\cdot\sqrt{2\cdot(a-r_2-r_4)^2-(r_2-r_4)^2}.$$

Teraz wyprowadzenie wzoru na a pozostaje jedynie kwestią sprawności rachunkowej.

Na koniec sangaku dość nietypowe, bowiem niezawierające ani jednego okręgu. Czytelnik Wnikliwy z pewnością zechce je rozwiązać w ramach rozwijania znajomości z japońskimi zadaniami geometrycznymi.

Sangaku 5. *Dane są cztery kwadraty $AESX$, $BHKE$, $CYIH$, $KINS$, ułożone jak na rysunku 7. Jaka jest zależność między polami kwadratów $BHKE$ oraz $KINS$, jeśli punkty A, B i C są współliniowe?*

Podpowiedź: można wpisać kwadraty, do których należą wierzchołki A, B, C, w kwadraty o podstawach zawierających się w prostej AB.

Literatura

[1] Lev Kurlyandchik, *Kącik olimpijski*, cz. I – geometria.
[2] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml
[3] http://mathworld.wolfram.com/CaseysTheorem.html
[4] Joanna Zakrzewska, *O pewnym uogólnieniu twierdzenia Ptolemeusza*, w: *Matematyka: poszukuję – odkrywam*, Wydawnictwo Szkolne Omega, 2011.