

Dowody V postulatu Euklidesa

Marek KORDOS



Notka dla uspokojenia Czytelnika Nerwowego. Oczywiście, V postulatu Euklidesa nie da się dowieść na podstawie poprzednich czterech. Niemniej jednak praktycznie każdy znaczący matematyk od V do XIX wieku taki dowód przeprowadził i dopiero jego koledzy wskazywali, w którym miejscu rozumowania użył przesłanki z czterech początkowych postulatów niewynikającej. W ten sposób rosła liczba zdań równoważnych V postulatowi, czy – jak kto woli – zdań, które są nieprawdziwe w geometrii nieeuklidesowej powstającej przez zaprzeczenie V postulatu. Niżej przedstawię trzy takie dowody, nie wskazując nieuprawnionych przesłanek. Zostaną one wskazane w następnym numerze *Delty*.

Najgłupiej postawiony problem matematyki

Oto pięć postulatów, z których Euklides w *Elementach* wyprowadził całą geometrię i arytmetykę.

- I. *Od dowolnego punktu do dowolnego innego można poprowadzić prostą.*
- II. *Ograniczoną prostą można dowolnie przedłużyć.*
- III. *Z dowolnego środka dowolnym promieniem można opisać okrąg.*
- IV. *Wszystkie kąty proste są równe.*
- V. *Jeśli suma kątów wewnętrznych jednostronnych, utworzonych przez dwie proste przecięte trzecią, jest mniejsza od dwóch kątów prostych, to proste te po przedłużeniu przetną się i to z tej właśnie strony.*

Jak łatwo zauważyć, liczba słów użytych do sformułowania początkowych czterech z nich (27) jest mniejsza od liczby słów potrzebnych do sformułowania piątego (30) – po grecku było podobnie, a przecież postulaty miały wyrażać treści proste i oczywiste.



Zauważył to jeden z epigonów matematyki greckiej, żyjący w czasach słusznie przez niego ocenianych jako lata wszelkiego upadku, Proklos (410–485). Oto jego wnioski i wynikający z nich program.

*Nie jest możliwe, aby uczonej tej miary co Euklides godził się na obecność tak długiego postulatu w aksjomatyce – obecność postulatu wzięła się z pośpiesznego kończenia przez niego *Elementów*, tak aby zdążyć przed nadejściem słusznie oczekiwanej rychłej śmierci; my zatem – czcząc jego pamięć – powinniśmy ten postulat usunąć lub co najmniej znacznie uprościć.*

Choć informację o myślach i stanie zdrowia Euklidesa Proklos wyssał sobie z palca, a ocena treści postulatów poprzez zliczanie słów jest co najmniej cudaczna, to – w co trudno uwierzyć – matematycy uznali program Proklosa za wyzwanie i faktycznie chyba wszyscy próbowali go zrealizować. Spróbujmy i my.

Czym wolno się posługiwać, dowodząc V postulatu?

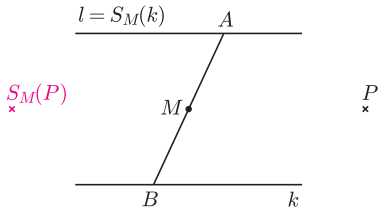
Dokładniej: jak rozumiano początkowe cztery postulaty (bo są one – jak na dzisiejsze wymagania – sformułowane dość enigmatycznie)? Otóż w tej kwestii panowała całkowita jednomyślność. Można to ująć w trzech punktach.

- *Wolno bez ograniczeń wykonywać wszystkie konstrukcje cyrklem i linijką, oraz przyjmuje się jako dane następujące fakty:*
- *Na płaszczyźnie prosta, przecinająca jeden z boków trójkąta i nieprzechodząca przez żaden z wierzchołków, przecina jeszcze jeden bok (nazywa się to aksjomatem Pascha).*
- *Symetrie zachowują wszystkie miary i relacje geometryczne.*

Geometria oparta na początkowych czterech postulatach Euklidesa, a właściwie na podanym tutaj rozumieniu ich treści, nazywana jest **geometrią absolutną**.

Nazwa *aksjomat Pascha* bierze się stąd, iż fakt korzystania z takiej przesłanki przez wszystkich geometrów wykrył dopiero w 1882 roku niemiecki matematyk Moritz Pasch (1843–1930).

Już Proklos zauważył, że przez punkt A poza prostą k można na płaszczyźnie poprowadzić prostą l , rozłączną z k .



Rys. 1

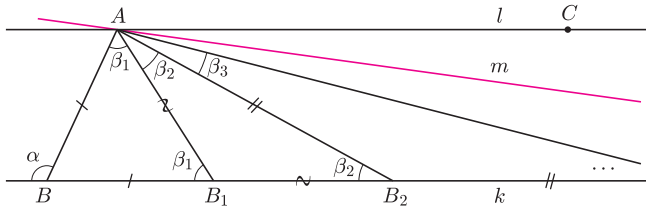
John Playfair (1748–1819), matematyk angielski, doprowadził do tego, że jego postulat powszechnie jest uważany za V postulat Euklidesa.

Istotnie, obierzmy na k jakiś punkt B i niech środkiem odcinka AB będzie M . Jako l weźmy obraz symetryczny k względem M (rys. 1). Gdyby proste k i l przecinały się w jakimś punkcie P , to – ponieważ narysowana figura ma środek symetrii – również $S_M(P)$ byłby punktem wspólnym k i l , a zatem dwie różne proste przecinałyby się w dwóch różnych punktach, co jest niemożliwe.

Wynika stąd natychmiast, że V postulat w aksjomatyce geometrii euklidesowej można zastąpić przez

Postulat Playfaira: Na płaszczyźnie przez każdy punkt poza prostą przechodzi co najwyżej jedna prosta z nią rozłączna.

Nieco trudu trzeba sobie zadać, by wykazać, że podobną rolę pełni **Postulat sumy kątów.** Suma kątów w trójkącie jest równa π .



Rys. 2

Mianowicie do punktów A i B z rysunku 1 dołączmy jeszcze punkt C leżący na l i dowolną prostą m przechodzącą przez A , biegnącą poniżej punktu C (rys. 2). Tworzymy na k ciąg punktów, które spełniają warunek $AB = BB_1$, $AB_i = B_i B_{i+1}$. Jak łatwo zauważyć (oznaczenia z rysunku), $\beta_i = \alpha/2^i$ (tu wykorzystujemy postulat sumy kątów – prawda?). Ponadto $\sphericalangle BAB_n = \sum_{i=1}^n \beta_i$, co dla $n \rightarrow \infty$ dąży do α .

Prosta m tworzy z odcinkiem AB kąt mniejszy od α (czemu?), a więc dla pewnego N mieści się w trójkącie BAB_N i wobec tego przecina k .

Jeśli więc udowodnimy w geometrii absolutnej postulat Playfaira lub postulat sumy kątów, to udowodnimy tym samym V postulat z początkowych czterech.

Potrzebne nam w tym celu będą jeszcze cztery twierdzenia geometrii absolutnej.

- Kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od nieprzyległego do niego kąta wewnętrznego.

Dokonując symetrii wierzchołka A względem środka boku BC , otrzymujemy punkt A' . W oznaczeniach z rysunku 3 mamy $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CBA' < \sphericalangle CBD$ – nierówność zachodzi na mocy aksjomatu Pascha (trójkąt ACD i prosta BA').

- W trójkącie naprzeciw dłuższego boku jest większy kąt.

Jeśli $AB > BC$, to na odcinku AB jest taki punkt D , że $BD = BC$. Wówczas (rys. 4) $\sphericalangle ACB > \sphericalangle DCB = \sphericalangle CDB > \sphericalangle BAC$ – ostatnia nierówność wynika z poprzedniego twierdzenia.

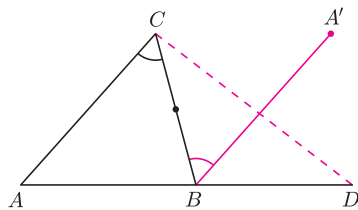
- Zachodzi nierówność trójkąta.

Aby dowieść, że $AB + BC > AC$, odłóżmy BC na przedłużeniu AB (rys. 5), otrzymując D . Mamy $\sphericalangle ACD > \sphericalangle BCD = \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC$. Stąd na mocy poprzedniego twierdzenia otrzymujemy $AB + BC = AD > AC$.

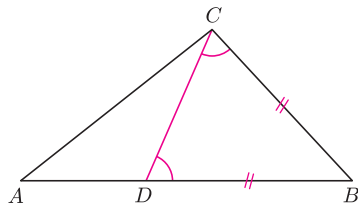
- Jeśli dwa trójkąty mają parę boków odpowiednio równych, to trzeci bok jest dłuższy w tym trójkącie, w którym kąt między nimi jest większy.

Takie dwa trójkąty możemy przemieścić w ten sposób, by jedna para równych boków pokryła się. Niech więc tymi trójkątami będą ABC i ABC' i niech $AC = AC'$. Załóżmy też, że $\sphericalangle BAC < \sphericalangle BAC'$. Mamy wykazać, że $BC < BC'$. Narysujmy dwusieczną kąta CAC' i oznaczmy jej punkt przecięcia z BC' przez D (rys. 6). Mamy (symetria) $DC' = DC$. Zatem $BC' = BD + DC' = BD + DC > BC$ z nierówności trójkąta.

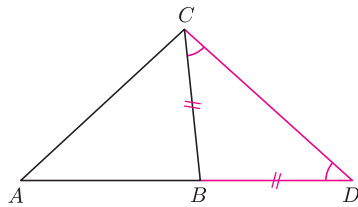
Warsztat został skompletowany, przystępujemy do dowodów V postulatu. Każdy z nich przez pewien czas był uznawany za poprawny.



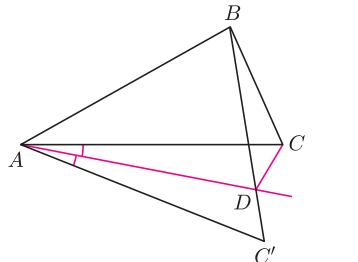
Rys. 3



Rys. 4

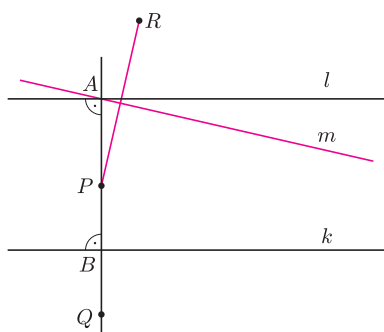


Rys. 5



Rys. 6

Farkas Bolyai (1775–1856), matematyk węgierski, ojciec jednego z odkrywców geometrii nieeuklidesowej.



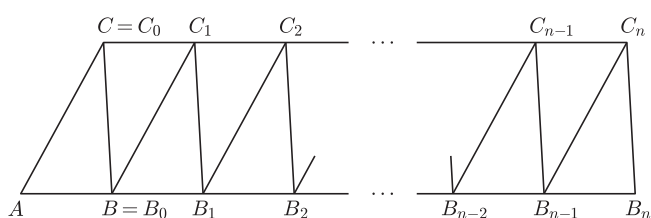
Rys. 7

Dowód postulatu Playfaira – Farkas Bolyai

Oznaczmy przez B rzut nieleżącego na prostej k punktu A na tę prostą (rys. 7). Prosta l , przechodząca przez A i prostopadła do AB , jest rozłączna z k (dlaczego?). Mamy wykazać, że każda inna prosta m przechodząca przez A przecina prostą k . Obierzmy na AB dowolnie punkt P i odbijmy go symetrycznie względem k i względem m , otrzymując, odpowiednio, Q i R . Punkt Q leży na prostej AB , a ponieważ $l \neq m$, więc R na prostej AB nie leży. Punkty P, Q, R tworzą zatem trójkąt, a proste k i m są symetralnymi dwóch jego boków, a więc obie przechodzą przez środek okręgu opisanego na trójkącie PQR , czyli przecinają się.

Dowód postulatu sumy kątów – Adrien-Marie Legendre

Z sumą kątów związane jest pojęcie *defektu trójkąta*; dla trójkąta ABC jest to liczba $\Delta(ABC) := \pi - (\sphericalangle ABC + \sphericalangle BCA + \sphericalangle CAB)$. Postulat sumy kątów orzeka, że defekty wszystkich trójkątów są równe 0. Wystarczy więc udowodnić, że defekt nie może być dodatni ani ujemny.



Rys. 8

Przypuśćmy, że defekt trójkąta ABC jest ujemny. Ustawmy wobec tego jego kopie na prostej AB , tak jak na rysunku 8, oraz połączmy odcinkami kolejne kopie wierzchołka C . Zauważmy, że $C_0C_1 < AB$; wynika to z faktu, iż $\sphericalangle ACB > \sphericalangle C_0BC_1$, a to dlatego, że $\sphericalangle ABC_0 + \sphericalangle C_0BC_1 + \sphericalangle C_1BB_1 = \pi$, natomiast założyliśmy, że $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB + \sphericalangle CAB > \pi$, przy czym $\sphericalangle CAB = \sphericalangle C_1BB_1$.

Adrien-Marie Legendre (1752–1833), matematyk francuski, także autor podręczników szkolnych; przytoczony dowód władze oświatowe Francji poleciły umieścić w jednym z tych podręczników – jego znajomość obowiązywała uczniów przez ponad 20 lat.

Oznaczmy $\varepsilon := AB - C_0C_1$ (jest to liczba dodatnia) i obliczmy długość łamanej $AC_0C_1 \dots C_nB_n$:

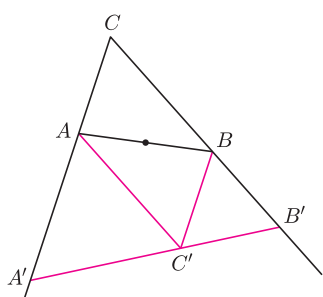
$$\begin{aligned} AC + n \cdot C_0C_1 + CB &= AC + CB + n \cdot AB - n \cdot \varepsilon = \\ &= (AC + CB - AB - n \cdot \varepsilon) + AB_n. \end{aligned}$$

Nietrudno zauważyć, że dla dużych n wartość nawiasu będzie ujemna, a to by znaczyło, że łamana jest krótsza od odcinka – sprzeczność z nierównością trójkąta.

Zatem trójkątów z ujemnym defektem nie ma. Przypuśćmy, że jest choćby jeden, ABC , który ma dodatni defekt δ . Odbijmy go symetrycznie względem środka odcinka AB i przez obraz C' punktu C poprowadźmy prostą przecinającą przedłużenia boków CA i CB w punktach A' i B' (rys. 9). Zauważmy, że defekt trójkąta $A'B'C$ jest sumą defektów czterech trójkątów, z jakich się składa – suma ta to 4π , od czego trzeba odjąć sumy kątów wszystkich trójkątów. Ale w punktach A, B i C' kąty te składają się na π , pozostaje więc tylko jedno π minus suma kątów trójkąta $A'B'C$. Na mocy pierwszej części dowodu widzimy, że

$$\begin{aligned} \Delta(A'B'C) &= \Delta(ABC) + \Delta(ABC') + \Delta(A'AC') + \Delta(C'BB') \geq \\ &\geq \Delta(ABC) + \Delta(ABC') = 2 \cdot \delta, \end{aligned}$$

bo przy symetrii defekt się nie zmienia. Zatem taka operacja zwiększa defekt trójkąta co najmniej dwukrotnie. Można więc za jej pomocą uzyskać defekt większy niż π , co by znaczyło, że trójkąt ma ujemną sumę kątów – sprzeczność.



Rys. 9

Girolamo Saccheri (1667–1733), matematyk włoski – jego prace zapoczątkowały podejrzenia, iż, być może, istnieją inne geometrie niż euklidesowa.

Tym, którzy chcieliby poznać intelektualne i psychiczne męki matematyków przez ponad tysiąc lat bezskutecznie dowodzących V postulatu, polecam wątek Velasqueza w szkatułkowej powieści Jana Potockiego *Rękopis znaleziony w Saragossie*.

Dowód nie wprost – Girolamo Saccheri

Tym razem rozumowanie jest następujące – przypuśćmy, że postulat sumy kątów jest nieprawdziwy. Wtedy – posługując się sytuacją z rysunku 2, uzyskamy rezultat, iż $\sphericalangle BAB_n = \sum_{i=1}^n \beta_i$ dla $n \rightarrow \infty$ dąży do kąta $\varphi < \alpha$.

Wówczas prosta m nakreślona tak, by tworzyła z l kąt $\alpha - \varphi$, będzie asymptotą prostej k . A przecież proste nie mogą być asymptotyczne.

Tyle dowodów – w następnym numerze ci, którzy nie dostrzegli w nich nieuprawnionych przesłanek, będą mogli je znaleźć.