

Gdy się nie ma, co się lubi...

Paweł STRZELECKI

Zbiór $Z \subset [a, b]$ jest **miary Lebesgue'a zero**, jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją przedziały I_j , $j = 1, 2, 3, \dots$, takie, że suma ich długości nie przekracza ε , a Z jest zawarty w $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \dots$. Jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ma jakąś własność poza zbiorem Z miary zero, to mówi się, że f ma tę własność **prawie wszędzie**.



Drugi tom prac zebranych Wacława Sierpińskiego jest kopalnią, obfitującą w przykłady funkcji o równie nieintuicyjnych własnościach.

W *Delcie* 10/2009, w artykule *Czy naprawdę prawie robi wielką różnicę*, Paulina Małolepsza i Tomasz Małolepszy piszą o przykładach funkcji ciągłych, które są różniczkowalne prawie wszędzie, ale jednak nie są całkami swoich pochodnych. Innymi słowy, okazuje się, że w twierdzeniu Newtona–Leibniza, orzekającym, że jeśli funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a, b]$ i ma (powiedzmy ciągłą) pochodną w (a, b) , to mamy

$$(1) \quad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt,$$

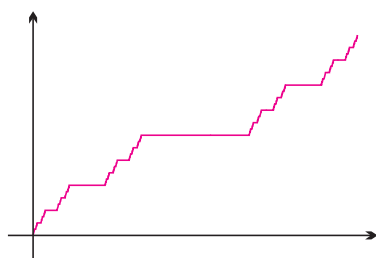
nie wolno opuścić założenia, iż pochodna istnieje w *każdym* punkcie $t \in (a, b)$. Nawet jeśli zbiór $Z \subset [a, b]$ tych punktów, gdzie f' nie istnieje, jest bardzo mały – ma *miarę Lebesgue'a równą zero*, tzn., intuicyjnie mówiąc, zerową długość – to może się okazać, że funkcja f ciągła na $[a, b]$ i różniczkowalna w $[a, b] \setminus Z$ nie spełnia równości (1). Przykłady takich funkcji można znaleźć we wspomnianym artykule; na marginesie naszkicowane są wykresy dwóch: funkcji Cantora i Minkowskiego. Ta druga jest ciągła i *ściśle* rosnąca na $[0, 1]$, lecz jej pochodna nie ma ochoty być (choćby tu i ówdzie) dodatnia, tylko znika prawie wszędzie. Jest *prawie wszędzie* taka, jaka powinna być pochodna funkcji stałej, tylko że funkcja Minkowskiego stała, niestety, nie jest.

Kogoś, kto na studiach uczył się podstaw teorii miary i całki Lebesgue'a i wysłuchiwał, że zachowanie funkcji na zbiorze miary zero nie wpływa na wartość całki, takie przykłady z początku zwykle dziwią i lekko niepokoją. Nie ma jednak w nich żadnej sprzeczności. Po prostu, jeśli dobra, stara, klasycznie rozumiana pochodna nie *wszędzie* istnieje, to (czasem) nie koduje już informacji o przyrostach funkcji.

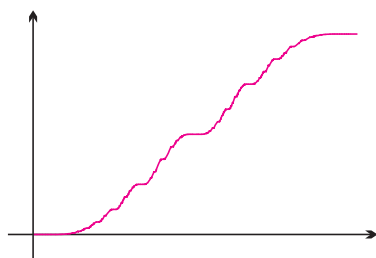
Można się z tym pogodzić i np. szukać coraz subtelniejszych, przeczących intuicji przykładów tego, że w twierdzeniu Newtona–Leibniza słówko *prawie* jest zakazane. Najważniejszą rzeczą, którą chciałbym Czytelnikowi powiedzieć, jest jednak to, że kontrprzykłady, choć ważne, są mimo wszystko drugorzędne, o ile nie służą dalszej budowie matematyki, tworzeniu takich dodatków do jej gmachu, które pozwalają – być może za pomocą zupełnie nowych pojęć, narzędzi i środków – robić coś, czego dotąd nie potrafiliśmy, albo wręcz uważaliśmy za niemożliwe. Nie chodzi wszak o to, żeby wszystko było zawsze po staremu.

Prawdziwie twórcze pytania, jakie stawiało sobie wielu matematyków między rokiem 1890 a 1940, gdy narodziły się i dojrzały teoria miary z analizą funkcjonalną, brzmią następująco: *Jak należałoby zmodyfikować lub rozszerzyć pojęcie pochodnej, żeby jakiś odpowiednik równości (1) był prawdziwy także wtedy, gdy f nie jest różniczkowalna w każdym punkcie? Czy można będzie wtedy posługiwać się innymi narzędziami rachunku całkowego, np. wzorem na całkowanie przez części?*

Okazuje się, że można to zrobić na kilka różnych, choć zasadniczo równoważnych sposobów. Zaczniemy od takiego, który dla funkcji jednej zmiennej jest naturalną drogą do uprawomocnienia wzoru Newtona–Leibniza (1) dla odpowiednio zawężonej klasy funkcji ciągłych,



Funkcja Cantora.

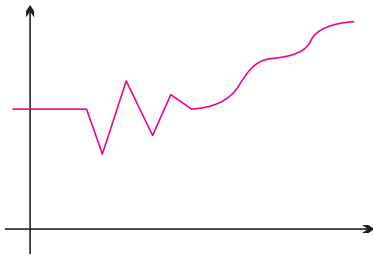


Funkcja Minkowskiego.

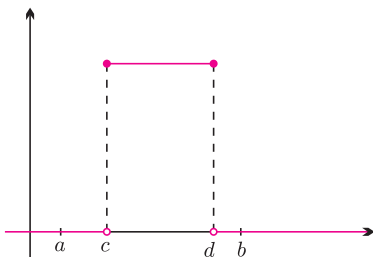


Która liczba jest większa?

$$A = 2^{2^{10}} \quad \text{czy} \quad B = 10^{10^2}$$



Funkcja kawałkami klasy C^1 (zad. 1).



Funkcja charakterystyczna przedziału $[c, d]$ (zad. 2).

Pouczającą rzeczą jest samodzielne rozwiązanie trzech zadań:

1. Jeśli f jest kawałkami klasy C^1 w $[a, b]$, to ma słabą pochodną, równą klasycznie rozumianej f' (poza skończoną liczbą punktów, gdzie f' może nie istnieć).
2. Jeśli $a < c < d < b$, to funkcja charakterystyczna przedziału $[c, d]$ nie ma słabej pochodnej w $[a, b]$.
3. Funkcja Cantora nie ma słabej pochodnej, choć ma klasycznie rozumianą pochodną prawie wszędzie.

Zauważmy, że słabą pochodną definiujemy nie *punkt po punkcie*, ale za pomocą wszystkich *średnich* $\int g\varphi$. To, jak się wydaje, jest bardziej zbliżone do fizycznego sensu *pomiaru* różnych wielkości.

Przy dodatkowym założeniu, że g_1 i g_2 są ciągłe, dowód jest łatwym zadaniem.

Pojęcie słabej pochodnej jest w analizie znacznie ważniejsze od zwykłej różniczkowości prawie wszędzie, bo zachowuje ważne twierdzenia!

różniczkowalnych prawie wszędzie. Ustalmy przedział $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i funkcję całkowalną g , która za chwilę odegra rolę pochodnej innej funkcji. Niech

$$(2) \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt, \quad x \in [a, b];$$

liczbę $f(a)$ można wybrać dowolnie, a prawą stronę wzoru traktujemy jako definicję f . Nietrudno sprawdzić, że tak określona funkcja f jest ciągła. To wynika z równości $|f(x) - f(y)| = |\int_x^y g(t) dt|$, a o ile całkujemy po dostatecznie krótkim przedziale, to całka z funkcji całkowalnej jest mniejsza niż dowolnie ustalony dodatni margines błędu, z upodobaniem oznaczany literką ε . Subtelniejszą, ale wykonalną rzeczą jest wykazanie, że f ma pochodną f' prawie wszędzie w $[a, b]$ i w dodatku f' jest równa g też prawie wszędzie w $[a, b]$.

Te funkcje ciągłe, które otrzymuje się ze wzoru (2), zmieniając funkcję całkowalną g na wszelkie możliwe sposoby, nazywają się *absolutnie ciągłymi*. To dla nich (i tylko dla nich) wzór Newtona–Leibniza ma sens; można się nie obawiać, czy f' istnieje wszędzie, czy tylko *prawie wszędzie*. Pozostałe funkcje ciągłe określa się mianem *osobliwych*. Słusznie; ich miejsce jest w gabinecie osobliwości.

Równoważna definicja funkcji absolutnie ciągłych, nieco trudniejsza do przelknięcia, ale lepiej poddająca się uogólnieniom na funkcje wielu zmiennych, jest następująca. Przypuśćmy, że f jest funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. Powiemy, że f ma w $[a, b]$ **słabą pochodną** równą g , jeśli po pierwsze g też jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, po drugie zaś wzór

$$(3) \quad \int_a^b f(t)\varphi'(t) dt = - \int_a^b g(t)\varphi(t) dt$$

zachodzi dla **każdej** funkcji $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, która ma ciągłą pochodną i spełnia warunek $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Cóż właściwie ma oznaczać taka, na pozór zupełnie niesprawdzalna, definicja? Proszę myśleć o tym tak: gdyby f miała ciągłą pochodną $f' = g$, to dla każdej funkcji φ , o której mowa, mielibyśmy $(f\varphi)' = f\varphi' + f'\varphi = f\varphi' + g\varphi$, a ponadto $(f\varphi)(a) = (f\varphi)(b) = 0$, gdyż funkcja φ ma z założenia zniknąć na końcach rozważanego przedziału. Zatem, na mocy wzoru Newtona–Leibniza, całka z funkcji $(f\varphi)'$ powinna być zerem, a właśnie to jest przeciwieństwem treści wzoru (3). Mówiąc nieco inaczej, (3) to wzór na całkowanie przez części, przemyślnie wbudowany w nową definicję pojęcia pochodnej.

Co więcej, wzór (3) może zachodzić tylko dla jednej funkcji g – gdyby zachodził dla g_1 i g_2 , to odejmując dwie równości stronami, otrzymalibyśmy $\int_a^b (g_1 - g_2)\varphi dt = 0$ dla każdej φ spełniającej podane wcześniej warunki. Można wykazać – jest to tak zwany lemat du Bois-Reymonda – że wtedy mamy $g_1 = g_2$ prawie wszędzie. Dlatego słaba pochodna jest określona jednoznacznie, a jeśli przypadkiem f jest ciągła i ma ciągłą pochodną określoną klasycznie, to obie pochodne są równe (prawie wszędzie, rzecz jasna).

Można wykazać, że funkcja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła, tzn. jest całką g , daną wzorem (2), wtedy i tylko wtedy, gdy f jest całkowalna i ma całkowalną *słabą pochodną*. Obie drogi wyboru rodziny funkcji, dla których (na każdym odcinku) zachodzi wzór Newtona–Leibniza, wiodą zatem do tego samego celu.



$$A = 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{1000} = 2^{10 \cdot 100} = 1024^{100} > 1000^{100} = 10^{300}$$

$$B = 10^{100}$$

Zatem $A > B$.

Już sama nazwa **słabe pochodne** kojarzy się, nomen omen, ze słabością, a więc – być może – z niedoskonałością, czymś wstydliwym, co niektórzy wolą ukryć i schować głęboko.



Zbiór $\{h: \Phi(h) \leq \text{const}\}$ może być niezarty w przestrzeni C^k i zwarty w odpowiednio dobranej większej przestrzeni funkcyjnej, z inną metryką, która sprawia, że zbiorów zwartych jest więcej.

Do najważniejszych sukcesów nowych metod, wracających w teorię równań cząstkowych i rachunek wariacyjny, należało rozwiązanie w początku lat 30. XX wieku zagadnienia Plateau, czyli dowód istnienia powierzchni o zadanym z góry brzegu i minimalnym polu. W 1969 roku Hildebrandt udowodnił, że każda powierzchnia minimalna jest do brzegu włącznie tak gładka, jak gładki jest ów z góry zadany brzeg.

A lekturę *Fausta* też gorąco polecam.

Wspomniana armia osób, korzystających rozmaicie z pojęcia słabej pochodnej, ma sporą grupkę warszawskich przedstawicieli, począwszy od np. Bogdana Bojarskiego, Aleksandra Pelczyńskiego czy Michała Wojciechowskiego w IMPAN, po Piotra Muchę, Piotra Rybkę, Witolda Sadowskiego czy Dariusza Wrzośka w Instytucie Matematyki Stosowanej i Mechaniki UW.

Dawne korzenie na UW mają także niektórzy jej przedstawiciele, pracujący dziś w USA, np. Piotr Hajłasz i Tadeusz Iwaniec.

Po cóż komu takie pojęcia? Dlaczego studiować paskudne funkcje wielu zmiennych, których dziwacznie określone *słabe pochodne* są zaledwie funkcjami całkowalnymi, więc mogą np. okazać się nieciągłe w bardzo wielu punktach? Odpowiedzi, że przestrzenie takich funkcji – tzw. *przestrzenie Sobolewa* – są same w sobie ciekawymi obiektami badań, nie kupi jednak ani fizyk, ani niejeden matematyk. Prawdziwy sens i powód rozważania takich funkcji przynosi jednak teoria równań różniczkowych i jej pogranicze z fizyką oraz geometrią.

Dlaczego? Otóż, przestrzenie Sobolewa są dużo obszerniejsze od przestrzeni C^k funkcji różniczkowalnych k -krotnie w sposób ciągły. Pierwszym odruchem kogoś, kto próbuje dowodzić istnienia rozwiązań równań różniczkowych, jest ograniczanie się właśnie do swojskich i znanych funkcji klasy C^k . Postępując tak, wiążemy sobie ręce: częścią dowodu istnienia *musi* być dowód ciągłości pochodnych. Interpretując równanie w ogólniejszym języku przestrzeni Sobolewa, otrzymujemy – po pierwsze – więcej kandydatów na rozwiązania, po drugie zaś oddzielamy samą kwestię istnienia rozwiązania od sprawdzania jego dodatkowych własności. Po trzecie, cała analiza funkcjonalna staje się skrzynią z narzędziami, których w tym obszerniejszym świecie można używać. Po czwarte, rozmaite zbiory funkcji, które w przestrzeniach C^k są niezarte, rozległe tak, że aż wiatr w nich hula, potrafią stawać się małe i przytulne właśnie w przestrzeniach Sobolewa. Nabierają wtedy sensu proste argumenty w rodzaju *każda funkcja ciągła Φ na zbiorze zwartym osiąga w pewnym punkcie swój kres dolny*, często nieprzydatne, gdy Φ jest funkcjonalem na przestrzeni C^k , wyposażonej w nazbyt wymagające pojęcie zbieżności. Po piąte wreszcie, bywa i tak, że nieliniowa natura problemu sama wymusza istnienie osobliwości rozwiązań. Defekty ciekłych kryształów, samoprzecięcia błon mydlanych... Wtedy przestrzenie, dopuszczające nieciągłe rozwiązania, są jak znalazł.

Pomysł, żeby znane pojęcie pochodnej zastąpić nowym, jest iście szatański. Stefan Hildebrandt porównywał go do mefistofelesowskiego wprowadzania papierowych pieniędzy zamiast złota. Papierowy oraz plastikowy pieniądz, którego nośnik wart jest niewiele, ma jednak zalety; wygodniej go nosić i przesyłać niż wory monet. Wygodniej dowodzić, że się go ma. Kto zechce, może w bankomacie wymienić plastik na papier; kto się uprze, dokona wymiany na złoto. Współczesna teoria równań różniczkowych zna odpowiednik tego postępowania: używając misternie splecionej sieci różnych nierówności, dowodzi się, że *słabe rozwiązania* wielu równań są w istocie pięknymi, klasycznymi rozwiązaniami klasy C^k .

Bez pojęcia słabej pochodnej i masy jego konsekwencji cała armia moich starszych i młodszych kolegów po fachu byłaby częściowo bezrobotna. Nie byłoby też sporej części analizy funkcjonalnej i harmonicznego opisu chemotaksji, wirów w nadprzewodnikach, przejść fazowych, ruchu cieczy lepkich, dyfuzji w ośrodkach porowatych itp.

Warto więc w funkcjach Cantora i Minkowskiego, oraz im podobnych, widzieć nie tyle osobliwe kontrprzykłady, ale przede wszystkim drogowskazy, które pewnie były niewyraźne, ale, jak ze stuletniej perspektywy jasno widać, matematyków klasy Poincarégo, Hilberta, Weyla czy Sobolewa kierowały we właściwą stronę.



Która liczba jest większa?

$$C = 2^{2^{1001}} \quad \text{czy} \quad D = 1000^{2^{1000}}$$



mała delta

Wspaniałym i przystępnym źródłem informacji o liczbach pierwszych jest książeczka Wacława Sierpińskiego *Co wiemy i czego nie wiemy o liczbach pierwszych*, PZWS 1961, którą można znaleźć w wielu bibliotekach publicznych.

Więcej o rozkładzie na czynniki pierwsze można przeczytać na stronie 12.

Złożony problem liczb pierwszych

Co to jest liczba pierwsza? Najkrótsza definicja mówi, że to taka liczba naturalna, która ma dokładnie dwa dzielniki. Każda liczba naturalna ma przynajmniej dwa dzielniki: 1 i samą siebie. Wyjątkiem jest jedynka, dla której te dwa dzielniki okazują się tym samym. Nie chcemy też rozpatrywać w tym kontekście zera (pomijając dyskusyjną kwestię, czy należy ono do zbioru liczb naturalnych). Wobec tego można powiedzieć, że liczby pierwsze to takie, które oprócz dwóch oczywistych dzielników nie mają żadnych nieoczywistych – nie rozkładają się na iloczyn liczb większych od 1 i mniejszych od nich samych. Pozostałe liczby naturalne (oprócz jedynki, która tworzy swoją własną klasę) nazywamy liczbami złożonymi, ponieważ można je rozłożyć na iloczyn mniejszych czynników. Te czynniki nie muszą być różne – na przykład najmniejsza liczba złożona to $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$. Natomiast ciekawą rzeczą jest to, że zestaw liczb pierwszych, których iloczyn jest daną liczbą, istnieje tylko jeden – takie rozkłady mogą się różnić tylko kolejnością czynników.

Liczy pierwsze są w pewnym sensie ciekawsze niż liczby złożone. Po pierwsze, występują rzadziej. Po drugie, bardzo trudno przewidzieć ich wystąpienia – może być tak, że dwie kolejne liczby pierwsze są oddzielone tylko przez jedną liczbę złożoną, a może być tak, że między nimi jest bardzo duża przerwa. Pary liczb pierwszych oddzielonych tylko jedną liczbą złożoną to liczby pierwsze bliźniacze. Nie wiadomo, jak dużo ich jest – znamy wiele przykładów, także wśród dużych liczb, ale nikt dotąd nie udowodnił, że jest ich nieskończenie wiele. Jak zwykle w takich przypadkach, trwają poszukiwania coraz większych takich par. Największa znana obecnie para liczb bliźniaczych, znaleziona w 2009 roku, to

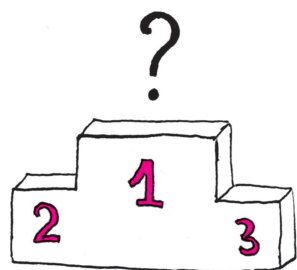
$$65516468355 \cdot 2^{333333} - 1 \quad \text{ i } \quad 65516468355 \cdot 2^{333333} + 1.$$

A czy istnieją trójki liczb pierwszych, takie że pierwsza jest oddzielona od drugiej przez jedną liczbę złożoną i druga od trzeciej tak samo? Czytelnik Spostrzegawczy wymieni od razu liczby 3, 5 i 7. Okazuje się jednak, że jest to jedyny przykład „trojaczków”. Żeby się o tym przekonać, wystarczy zauważyć, że liczby p , $p + 2$ i $p + 4$ dają różne reszty z dzielenia przez 3. Ponieważ mamy tylko trzy możliwe reszty do dyspozycji, to jedna z nich musi być zerem, czyli jedna z liczb p , $p + 2$, $p + 4$ jest podzielna przez 3. Wobec tego, jeśli żądamy, żeby te liczby były pierwsze, to wśród nich musi wystąpić 3. To oznacza, że nie ma innych możliwości poza układem 3, 5 i 7.

Nie umiemy na razie rozstrzygnąć, ile jest par liczb pierwszych leżących możliwie blisko, ale wiadomo, że przerwy między kolejnymi liczbami pierwszymi mogą być dowolnie długie. Żeby się o tym przekonać, wystarczy podać metodę konstrukcji ciągu n kolejnych liczb złożonych dla n będącego dowolną liczbą naturalną. A ten ciąg wygląda tak:

$$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, (n + 1)! + 4, \dots, (n + 1)! + n + 1$$

– kolejne liczby dzielą się przez 2, 3, 4, ..., $n + 1$.



O liczbach pierwszych oddzielonych równymi odstępami – czyli o ciągach arytmetycznych złożonych z liczb pierwszych – piszemy na stronie 8.



$$C = 2^{2^{2^{1001}}} = 2^{2^{2^{1000} + 2^{1000}}} = 2^{2^{2^{1000}} \cdot 2^{2^{1000}}} = \left(2^{2^{2^{1000}}}\right)^{2^{2^{1000}}}$$

$$D = (1000)^{2^{2^{1000}}}$$

Zatem $C > D$.



Dziwna, „piętrowa” postać liczb pierwszych Fermata bierze się stąd, że jeśli liczba k ma w swoim rozkładzie choćby jeden czynnik nieparzysty (oznaczmy go q), to liczba $2^k + 1$ dzieli się przez $2^q + 1$; mam nadzieję, że Czytelnik Sprytny potrafi to udowodnić.

Liczby pierwsze Fermata okazały się ważne w geometrii: Carl Gauss udowodnił, że jeśli p jest taką liczbą, to można cyrklem i linijką skonstruować p -kąt foremny, a Pierre Wantzel – że dla żadnej innej liczby pierwszej taka konstrukcja nie jest możliwa.

Odpowiedź w numerze.

jest skończenie wiele. W szczególności obserwację, że liczba $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ nie może być złożona, otrzymaliśmy, zakładając, że wymnożyliśmy wszystkie istniejące liczby pierwsze. Tymczasem mogą istnieć liczby pierwsze większe od każdej z wymnażanych, ale mniejsze od ich iloczynu – tutaj takimi liczbami są, na przykład, 17, 29, czy właśnie 59.

Istnieją inne wzory, których matematycy używali do znajdowania dobrych kandydatów na liczby pierwsze. Na przykład Marin Mersenne badał liczby postaci $2^n - 1$ i znajdował wśród nich liczby pierwsze, wiedząc, że taka liczba może być pierwsza tylko wtedy, gdy wykładnik n jest liczbą pierwszą. Na liczbach tej postaci bardzo dobrze działają niektóre testy pierwszości, więc znane są obecnie bardzo duże liczby pierwsze Mersenne’a. Aktualny rekord (prawie 13 milionów cyfr) to $2^{43112609} - 1$. Wyniki testów pierwszości dla tej liczby otrzymano w sierpniu 2008 roku i od tego czasu nie udało się trafić na żadną większą liczbę pierwszą Mersenne’a. Nie wiadomo nawet, czy jest ich nieskończenie wiele. Wiemy natomiast, że wśród liczb postaci $2^p - 1$, gdzie p to liczba pierwsza, istnieje nieskończenie wiele liczb złożonych.

Pierre Fermat z kolei zajmował się liczbami postaci $2^{2^n} + 1$. Po sprawdzeniu pierwszości pięciu początkowych wyrazów tego ciągu (liczymy od $n = 0$) postawił nawet hipotezę, że wszystkie liczby opisane tym wzorem są pierwsze. Jednak szosta z tych liczb, $2^{2^5} + 1$, jest już złożona, ale Fermatowi nie udało się rozłożyć jej na czynniki pierwsze. Co ciekawe, pewien rozkład szóstej liczby Fermata można znaleźć za pomocą łatwych przekształceń arytmetycznych – trzeba tylko umieć dobrze zgadywać.

$$\begin{aligned} 2^{2^5} + 1 &= 2^{32} + 1 = 2^{32} + 2^{28} \cdot 5^4 - 2^{28} \cdot 5^4 + 1 = \\ &= 2^{28}(2^4 + 5^4) - (2^{14} \cdot 5^2 + 1)(2^7 \cdot 5 + 1)(2^7 \cdot 5 - 1) \end{aligned}$$

Widać, że to już koniec? Wystarczy zauważyć, że

$$2^4 + 5^4 = 16 + 625 = 641 = 640 + 1 = 2^7 \cdot 5 + 1.$$

Zatem

$$2^{2^5} + 1 = 641(2^{28} - (2^{14} \cdot 5^2 + 1)(2^7 \cdot 5 - 1)).$$

Jak widać, rozstrzygnięcie tej hipotezy z pewnością leżało w zasięgu możliwości Fermata. Natomiast w zasięgu naszych możliwości do tej chwili nie leży rozstrzygnięcie, czy istnieją jeszcze inne liczby pierwsze Fermata, poza wymienionymi przez niego, czyli 3, 5, 17, 257 i 65537.

Później Leonard Euler poszukiwał liczb pierwszych wśród wartości pewnych wielomianów. Znalazł funkcję $f(x) = x^2 + x + 41$, która po podstawieniu liczb z zakresu od 0 do 39 daje w wyniku liczby pierwsze. Jak łatwo sprawdzić, dla $x = 40$ otrzymujemy już liczbę złożoną. A czy istnieją inne wielomiany postaci $x^2 + x + p$, gdzie p jest pierwsza, o tej własności, że dla liczb od 0 do $p - 2$ dają w wyniku liczbę pierwszą?

W czasach Eulera powstała także piękna hipoteza, nierozstrzygnięta do dzisiaj. Christian Goldbach zauważył, że wiele liczb parzystych można przedstawić w postaci sumy dwóch liczb pierwszych (niekoniecznie różnych). Co więcej, nie znalazł przykładu liczby parzystej, której nie dałoby się zapisać w ten sposób (oprócz 2, która po prostu jest za mała). Postawił więc hipotezę, że każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych. Prostota sformułowania jest, niestety, złudna.



Dla $2 < x \leq 3$ mamy $2 = \sqrt{2}^2 < \sqrt{2}^x \leq \sqrt{2}^3 = 2\sqrt{2} < 3$,
czyli $2 < \sqrt{2}^x < 3$ i dalej $2 < \sqrt{2}^{\sqrt{2}^x} < 3$,
skąd dochodzimy do $2 < E < 3$.

Zatem $E < F$.



Odpowiedź w numerze.

Przez ponad 250 lat, używając zarówno „tradycyjnych” metod matematycznych, jak i programów komputerowych, matematycy nie zdołali udowodnić ani obalić tej hipotezy. Sprawdzono ją jednak, oczywiście za pomocą metod komputerowych, dla liczb parzystych mniejszych od 10^{18} – umiemy przedstawić te liczby jako sumy dwóch liczb pierwszych. Te wyniki obliczeniowe skłaniają matematyków do wiary w prawdziwość hipotezy Goldbacha, ale dopóki nie będzie dowodu, nigdy nie wiadomo, co może się zdarzyć.

A co z liczbami nieparzystymi? Tak zwana słaba hipoteza Goldbacha mówi, że każdą liczbę nieparzystą większą niż 5 można przedstawić jako sumę trzech liczb pierwszych. Czytelnik Wnikliwy sprawdzi, że słaba hipoteza faktycznie wynika z tej dla liczb parzystych. Niestety, słabszej wersji także, jak dotąd, nie udało się rozstrzygnąć.

Na koniec – wracając do problemów, które powinny przynieść Czytelnikom więcej radości niż frustracji – zagadka. 30 jest największą liczbą, dla której wszystkie mniejsze od niej i względnie pierwsze z nią są liczbami pierwszymi. Jakie są inne takie liczby i dlaczego nie ma większych?

Małą Deltę przygotowała Maria DONTEN-BURY

Prosto z nieba: Przyszłość Cyg X-1

Jeszcze zanim pierwsze teleskopy satelitarne umożliwiły zajrzenie w przestrzeń kosmiczną w czasach, gdy technologie kosmiczne wykorzystywane były przeważnie na potrzeby zimnej wojny, energetyczne promieniowanie pochodzące z gwiazd badano licznikami Geigera wynoszonymi w wyższe warstwy atmosfery przez suborbitalne rakiety, które, obracając się wokół własnej osi, skanowały niebo. Jednym z pierwszych odkrytych tą metodą obiektów (1964 r.) był Cyg X-1, znajdujący się w gwiazdozbiornie Łabędzia w okolicy η Cygni, w dolnej części „krzyża” tworzonego przez najjaśniejsze gwiazdy tej konstelacji. W kwietniu Łabędź widoczny jest na północnym wschodzie, w drugiej połowie nocy. Szybko ustalono, że w miejscu, z którego pochodzi promieniowanie rentgenowskie, znajduje się niebieski nadolbrzym typu widmowego O, nazwany HDE 226868. Z teorii budowy i ewolucji wynika jednak, że gwiazdy tego typu nie są w stanie emitować tak znacznych ilości fotonów X. Sprzeczność jest na szczęście pozorna i łatwa do wytłumaczenia – analizując zachowanie się linii widmowych w zależności od energii, astronomowie ujawnili istnienie świecącego słabo w świetle widzialnym towarzysza związanego z nadolbrzymem grawitacyjnie i powodującego zmiany widma z okresem orbitalnym (efekt Dopplera). Ów drugi, jasny rentgenowsko składnik układu, otoczony jest dyskiem akrecyjnym powstającym z materii „ściąganej” z HDE 226868, ma niewielkie rozmiary, ok. 50 km, oszacowane na podstawie zmienności czasowej promieniowania rentgenowskiego, oraz znaczną masę, rzędu 15 mas Słońca – parametry te jednoznacznie kwalifikują go jako czarną dziurę.

Mimo że rychło Cyg X-1 stał się powszechnie uznawanym „empirycznym dowodem” potwierdzającym teorię Einsteina, w 1975 roku klasyki teorii grawitacji, Kip Thorne i Stephen Hawking, zawarli głośny zakład o „istnienie (bądź nie)

astrofizycznych czarnych dziur”. Hawking, który większość swojej kariery poświęcił studiowaniu czarnych dziur, przekornie przyjął rolę sceptyka, kwestionując jakość obserwacji Cyg X-1: wygrywając zakład, miał *na pocieszenie* otrzymać od Thorne’a 4 lata prenumeraty magazynu satyrycznego *Private Eye*; jednak zaledwie kilkanaście lat później, mając już do dyspozycji o wiele więcej doskonałych obserwacji, przyznał się (z pewnością bez cienia żalu) do przegranej.

Dorośli Czytelnicy zechcą sami sprawdzić, co w nagrodę otrzymał Thorne.

Niedawne pomiary odległości przy użyciu sieci teleskopów radiowych VLBA umożliwiają dokładne oszacowanie parametrów obu składników – zwłaszcza jasności, która jest w astronomii ściśle związana z pomiarem odległości – a także, co jeszcze ciekawsze, analizę ich przyszłych losów. Według przeprowadzonych symulacji Cyg X-1 przekształci się w ciągu następnych 3 milionów lat w ciasny, relatywistyczny układ czarna dziura–gwiazda neutronowa [1]. W odróżnieniu od układów podwójnych *dwu gwiazd neutronowych*, których radioastronomowie odkryli już kilka, nie znamy ani jednego układu „mieszanego” z czarną dziurą. Może to np. oznaczać, że z jakiegoś powodu występują one w przyrodzie bardzo rzadko. Byłaby to niewesoła wiadomość dla poszukiwaczy fal grawitacyjnych, gdyż właśnie relatywistyczne układy podwójne złożone z obiektów różnych typów stanowią główne źródło takich fal o możliwych do zaobserwowania częstościach. Czy naprawdę jest się czym martwić, zobaczymy za kilka lat – następna generacja detektorów (Advanced Virgo i LIGO) zacznie obserwacje w 2015 r.

Michał BEJGER

[1] <http://news.sciencemag.org/sciencenow/2011/08/the-fate-of-the-first-black-hole.html>



Która liczba jest większa?

$$G = (\log_2 2011)^{\log_2 2011} \quad \text{czy} \quad H = 2011^{\log_2 \log_2 2011}$$

Do nieskończoności jeszcze sporo brakuje

$a + 4r$	$a + 9r$	$a + 2r$
$a + 3r$	$a + 5r$	$a + 7r$
$a + 8r$	$a + r$	$a + 6r$

Zamieszczony w poprzednim numerze, jako zapowiedź tego numeru, widoczny obok kwadrat magiczny jest dla $a = -11$ (lub $a = 199$) i $r = 210$ złożony z samych liczb pierwszych.

Można na to spojrzeć inaczej: istnieje ciąg arytmetyczny o długości co najmniej 9 złożony z liczb pierwszych (a nawet dwa takie ciągi).

Powstaje pytanie, czy istnieją dłuższe ciągi arytmetyczne złożone z samych liczb pierwszych.

Dawno, dawno temu – bo prawie przed ćwierćtysiącleciem – Lagrange i Waring doszli do wniosku, że powinny istnieć dowolnie długie takie ciągi złożone z liczb pierwszych. Do wniosku doszli, ale udowodnić tego nie umieli, podobnie jak wielu ich następców.

Dowód udało się uzyskać dopiero 8 lat temu – dokonali tego Ben Green i Terence Tao. Ale już poprzednio trwały zawody w znajdowaniu jak najdłuższego takiego ciągu. W 1979 roku (z którego pochodzą oba teksty *Starej Delty*, przytoczone w tym numerze) rekordowy ciąg arytmetyczny liczb pierwszych miał 17 wyrazów (i liczył sobie 2 lata):

$$3430751869 + 87297210 \cdot k, \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \dots, 16.$$

Autor zagadek matematycznych znajdujących się na dole pierwszych 20 stron tego numeru *Delty*, Jarosław Wróblewski, ustanowił w tej kategorii rekord świata w styczniu 2007 roku, budując ciąg

$$468395662504823 + 205619 \cdot 23\# \cdot k, \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \dots, 23;$$

symbol $n\#$ oznacza iloczyn liczb pierwszych nieprzekraczających n .

Rok później, w maju 2008 wraz z Raananem Chermonim poprawił ten wynik o 1, budując ciąg

$$6171054912832631 + 366384 \cdot 23\# \cdot k, \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \dots, 24.$$

Pół roku później powstał międzynarodowy projekt *PrimeGrid* zbiorowego poszukiwania takich ciągów (<http://www.primegrid.com/>) i (chyba) do niego należy obecnie rekord – uzyskany w kwietniu 2010 ciąg

$$43142746595714191 + 23681770 \cdot 23\# \cdot k, \quad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \dots, 25.$$

M. K.

Oczywiście, nieskończenie długi – niestały – ciąg arytmetyczny, złożony z liczb pierwszych, nie istnieje. Dowód powinien Ci, Czytelniku, przyjść do głowy. Ale jeśli tego zaniedba, możesz poszukać go w numerze.

Z istnienia dowolnie długiego ciągu arytmetycznego, złożonego z samych liczb pierwszych, wynika, że dla dowolnego m istnieje nieskończenie wiele takich ciągów o długości m – prawda?

Odrębną konkurencją jest poszukiwanie jak najdłuższego ciągu arytmetycznego złożonego z kolejnych liczb pierwszych (czyli takiego, że dla dowolnych dwóch jego kolejnych wyrazów nie ma liczby pierwszej leżącej między nimi) – tu aktualnie (chyba) rekordowa długość to 10. Poszczególne wyrazy oddziela zaledwie 210 (a może to ten, od którego zaczęliśmy?).

Odpowiedź na pytania o trzydziestkę

Sprawdźmy, dla których liczb wszystkie mniejsze od nich i względnie pierwsze z nimi – poza jedynką – są liczbami pierwszymi.

Dla 2 takich liczb nie ma (formaliści powiedzą więc, że jest dobrze). Dla 3 liczbą taką jest tylko 2, a ta jest pierwsza. Dla 4 to 3 – dobrze. Dla 5 jest już źle: 4 jest względnie pierwsze z 5, a pierwsze nie jest. Morał: 4 będzie psuło wszystkie większe liczby nieparzyste, stąd warto zająć się już tylko parzystymi. Dla 6 mamy 5 – dobrze, dla 8 jest 3, 5, 7 – dobrze.

Ale 10 już odpada ze względu na 9 – stąd dalej warto zajmować się tylko liczbami podzielными przez 6. Dla 12 mamy 5, 7, 11 – dobrze, dla 18 jest 5, 7, 11, 13, 17 – dobrze i dla 24 też jest dobrze (5, 7, 11, 13, 17, 19, 23). Teraz tytułowa 30. Dla niej mamy 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Kolejna liczba podzielna przez 6 jest zła: 25 jest mniejsze od 36 – konsekwentnie powinniśmy powiedzieć, że teraz będziemy rozważali tylko liczby podzielne przez 30. Tylko że to nie pomaga, bo 49 jest mniejsze od 60. Czytelnik zechce przedłużyć to rozumowanie na „pozostałe” liczby naturalne.



$$\log_2 G = (\log_2 \log_2 2011) \cdot (\log_2 2011)$$

$$\log_2 H = (\log_2 2011) \cdot (\log_2 \log_2 2011)$$

$$\text{Zatem } G = H.$$

Stara Delta

Świat idzie naprzód

Kwadrat „cebulkowy” to taki, z którego przez usunięcie skrajnych kolumn i wierszy otrzymuje się nowy, mniejszy kwadrat magiczny i operację tę możemy z powodzeniem kontynuować. Mamy więc obok nie tylko kwadrat magiczny 13×13 , ale także wewnątrz niego kwadrat magiczny 11×11 itd. aż do kwadratu magicznego 3×3 .

W *Delcie* 3/1979 zamieściliśmy największy znany wówczas kwadrat magiczny złożony z różnych liczb pierwszych – było ich 169. Co więcej, był to kwadrat „cebulkowy”. Oto on:

1153	8923	1093	9127	1327	9277	1063	9133	9661	1693	991	8887	8353
9967	8161	3253	2857	6823	2143	4447	8821	8713	8317	3001	3271	907
1831	8167	4093	7561	3631	3457	7573	3907	7411	3967	7333	2707	9043
9907	7687	7237	6367	4597	4723	6577	4513	4831	6451	3637	3187	967
1723	7753	2347	4603	5527	4993	5641	6073	4951	6271	8527	3121	9151
9421	2293	6763	4663	4657	9007	1861	5443	6217	6211	4111	8581	1453
2011	2683	6871	6547	5227	1873	5437	9001	5647	4327	4003	8191	8863
9403	8761	3877	4783	5851	5431	9013	1867	5023	6091	6997	2113	1471
1531	2137	7177	6673	5923	5881	5233	4801	5347	4201	3697	8737	9343
9643	2251	7027	4423	6277	6151	4297	6361	6043	4507	3847	8623	1231
1783	2311	3541	3313	7243	7417	3301	6967	3463	6907	6781	8563	9091
9787	7603	7621	8017	4051	8731	6427	2053	2161	2557	7873	2713	1087
2521	1951	9781	1747	9547	1597	9811	1741	1213	9181	9883	1987	9721

A dziś – proszę: istnieje już „cebulkowy” kwadrat magiczny aż o trzy większy, złożony zatem z dwustu pięćdziesięciu sześciu liczb pierwszych.

2719	191	2531	227	2473	263	2459	283	2437	307	2417	17	47	59	2699	2711
71	2399	509	2207	569	2153	587	2137	599	2129	337	353	397	2383	2351	2659
2657	433	2113	797	1907	829	1877	857	1871	619	641	701	2069	2099	2297	73
97	2287	719	1867	1031	1697	1061	1667	883	907	947	1789	1801	2011	443	2633
2621	457	2003	983	1637	1237	1481	1117	1129	1163	1549	1607	1747	727	2273	109
137	2269	733	1733	1187	1471	1277	1279	1297	1427	1439	1543	997	1997	461	2593
2591	463	1987	1009	1499	1283	2617	53	83	2707	1447	1231	1721	743	2267	139
151	2251	751	1709	1103	1307	449	2341	2311	359	1423	1627	1021	1979	479	2579
2557	487	1973	919	1171	1409	2371	419	389	2281	1321	1559	1811	757	2243	173
179	2239	643	971	1579	1429	23	2647	2677	113	1301	1151	1759	2087	491	2551
2549	373	691	1753	1621	1291	1453	1451	1433	1303	1259	1109	977	2039	2357	181
43	383	2053	1777	1123	1493	1249	1613	1601	1567	1181	1093	953	677	2347	2687
67	2309	2083	929	1699	1033	1669	1063	1847	1823	1783	941	863	647	421	2663
2689	2381	631	1933	823	1901	853	1873	859	2111	2089	2029	661	617	349	41
2693	379	2221	523	2161	577	2143	593	2131	601	2393	2377	2333	347	331	37
19	2539	199	2503	257	2467	271	2447	293	2423	313	2713	2683	2671	31	11

I jak tu nie wierzyć w postęp!

M. K.



Która liczba jest większa?

$$I = \log_2 3 \quad \text{czy} \quad J = \log_5 13$$



Rozwiązanie zadania F 810.

Praca jest równa polu powierzchni zawartej wewnątrz diagramu pV , a więc:

$$W = (p_2 - p_1)(V_3 - V_2 + V_4 - V_1)/2.$$

Objętości gazu to

$$V_3 = V_2 T_3 / T_2 = V_1 T_3 / T_1,$$

$$V_4 = V_1 T_4 / T_1 = V_1 T_2 / T_1,$$

a ciśnienie

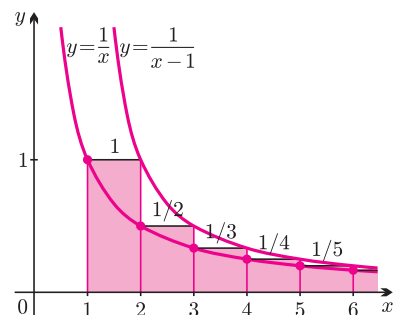
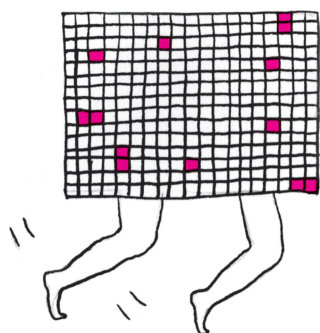
$$p_2 = p_1 T_2 / T_1.$$

Zatem:

$$W = p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 2 \right) \frac{T_2 - T_1}{T_1},$$

ale $p_1 V_1 = NRT_1$, więc ostatecznie

$$W = NR \left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 2 \right) (T_2 - T_1).$$



Jak szybko działa sito?

Jakub RADOSZEWSKI

Jedną z najlepiej znanych metod wyznaczania liczb pierwszych jest sito Eratostenesa. Opiera się ona na spostrzeżeniu, w zasadzie oczywistym, że jak wyrzucimy wszystkie liczby złożone, to zostaną same liczby pierwsze. Jeśli chcemy wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze nieprzekraczające n , wypisujemy na kartce liczby naturalne od 1 do n , wykreślamy 1, bo nie jest pierwsza, zostawiamy 2 i wykreślamy wszystkie jej wielokrotności, potem zostawiamy 3 i wykreślamy wszystkie jej wielokrotności (niektóre, np. 6, już zostały wykreślone) i tak dalej. W kolejnym kroku pozostawiamy pierwszą niewykreśloną liczbę i wykreślamy jej wielokrotności. Liczby, które nie zostaną wykreślone, to wszystkie liczby pierwsze nie większe od n .

W tym artykule zastanowimy się nad tym, jak szybkie jest sito Eratostenesa. Najczęstszą operacją wykonywaną w tym algorytmie jest wykreślanie.

Za pomocą każdej liczby pierwszej wykreślimy, rzecz jasna, co najwyżej $\frac{n}{2}$ liczb złożonych, wobec czego wykonamy łącznie co najwyżej $O(n^2)$ operacji.

Zauważmy, że możemy zakończyć wykreślanie, gdy rozpatrzmy liczby pierwsze od 2 do \sqrt{n} . Faktycznie: każda liczba złożona z zakresu od 4 do n musi mieć jakiś dzielnik pierwszy nie większy niż \sqrt{n} . W ten sposób otrzymujemy wariant algorytmu sita działający w czasie $O(n\sqrt{n})$.

Okazuje się, że możemy uzyskać jeszcze lepsze oszacowanie złożoności czasowej. W tym celu w ogóle nie musimy zmieniać zasady działania algorytmu – wystarczy bardziej precyzyjnie oszacować liczbę wykreśleń. Oznaczmy przez p_1, \dots, p_k kolejne liczby pierwsze nieprzekraczające n . Wówczas łączna liczba wykreśleń to co najwyżej

$$(*) \quad \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i}.$$

Tę sumę możemy oszacować z góry przez

$$\sum_{i=1}^n \frac{n}{i} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}.$$

Czytelnik Wytrawny dostrzeże w powyższej sumie n -tą liczbę harmoniczną $H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ i od razu stwierdzi, że przecież $H_n \approx \ln n$. Można to także sprawdzić, jeśli narysuje się n prostokątów o szerokości 1 i wysokościach kolejno $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ itd., a także wykresy funkcji $f_1(x) = \frac{1}{x}$ i $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$ (rysunek). Wówczas suma pól prostokątów – równa co do wartości liczbie H_n – jest nie mniejsza niż pole pod wykresem funkcji $f_1(x)$ dla $1 \leq x \leq n+1$, a zatem:

$$H_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1).$$

Podobnie, H_n możemy oszacować z góry przez 1 plus pole pod wykresem $f_2(x)$ dla $2 \leq x \leq n+1$, czyli:

$$H_n \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{dx}{x-1} = 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln n + 1.$$

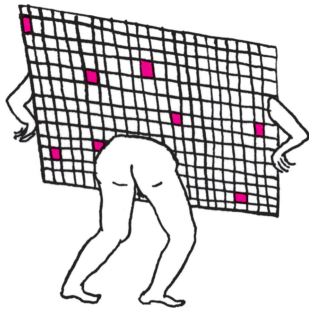
Wartość logarytmu nie zmienia się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną podniesiemy do tej samej potęgi.

$$I = \log_{27} (3^7) = \log_{128} 2187; \quad J = \log_{53} (13^3) = \log_{125} 2197.$$

Większą wartość ma logarytm z większą liczbą logarytmowaną i mniejszą podstawą (o ile liczby te są większe od 1).

Zatem $I < J$.





W ten sposób wykazaliśmy, że złożoność sita Eratostenesa to $O(nH_n) = O(n \log n)$. Co ciekawe, można otrzymać jeszcze lepsze oszacowanie, jeśli tylko dokładniej przyjrzeć się sumie (*) i wykorzystać pewien znany fakt z teorii liczb.

Oznaczmy przez $\pi(n)$ liczbę liczb pierwszych nieprzekraczających liczby n . Kluczowy fakt to: $\pi(n)$ asymptotycznie zachowuje się tak, jak $n/\ln n$. Nie będziemy tego faktu dowodzić. Korzystając z niego, wnioskujemy, że i -ta liczba pierwsza, p_i , średnio jest rzędu $i \ln i$. To pozwala nam zapisać sumę (*) w postaci równoważnej asymptotycznie sumy:

$$n \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{1}{i \ln i} \sim n \sum_{i=1}^{\lfloor n/\ln n \rfloor} \frac{1}{i \ln i}.$$

Podobnie jak poprzednio, n -tą część tej sumy możemy asymptotycznie przybliżać całką:

$$\int_2^{n/\ln n} \frac{dx}{x \ln x},$$

a tę z kolei oszacować z góry przez całkę z prostszym ograniczeniem górnym:

$$\int_2^n \frac{dx}{x \ln x}.$$

Ostatnią z powyższych całek wyznaczamy przez podstawienie $y = \ln x$, $dy = \frac{dx}{x}$:

$$\int_2^n \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{dy}{y} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{\ln n} \leq \ln \ln n.$$

W ten sposób otrzymaliśmy asymptotyczne oszacowanie sumy (*) przez funkcję $\ln \ln n$, co pozwala stwierdzić, że złożoność sita Eratostenesa to $O(n \log \log n)$.

Czytelnik nie lubiący manipulować takimi całkami może otrzymać podobnie dobre oszacowania, jeśli tylko spojrzy na algorytm sita z nieco innej strony. Otóż każda liczba złożona między 4 a n zostanie wykreślona tyle razy, ile ma różnych czynników pierwszych w rozkładzie. Dla liczby całkowitej dodatniej k , oznaczmy przez $\omega(k)$ liczbę różnych dzielników pierwszych liczby k .

Łatwo wykazać, że zawsze $\omega(n) \leq \log_2 n$. Faktycznie, jeśli $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_j$, przy czym wszystkie liczby q_1, \dots, q_j są pierwsze, to $n \geq 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^j$, skąd $j \leq \log_2 n$, więc tym bardziej $\omega(n) \leq \log_2 n$. W ten sposób łatwo uzasadniliśmy, że łączna liczba wykreśleń jest rzędu $O(n \log n)$. Niestety, tą metodą trudniej jest dojść do lepszego z wcześniejszych oszacowań, tj. $O(n \log \log n)$.

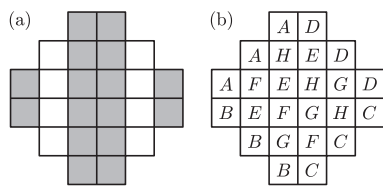
Metodę sita możemy jeszcze trochę usprawnić. Zauważmy, że za pomocą danej liczby pierwszej p_i , nie większej od \sqrt{n} , wystarczy wykreślać liczby złożone począwszy od p_i^2 , gdyż wszystkie wcześniejsze wielokrotności p_i musiały zostać wykreślone wcześniej. Taka poprawka nie zmienia jednak złożoności czasowej algorytmu.

Na koniec warto wspomnieć, że w algorytmie sita Eratostenesa cały zakres liczb od 1 do n możemy podzielić na kawałki długości \sqrt{n} i wykreślać liczby złożone tylko w takich kawałkach. To pozwala nam zredukować rozmiar tablicy używanej do wykreślania do wartości rzędu $O(\sqrt{n})$, co ma niebagatelne znaczenie tak teoretyczne, jak i praktyczne. Więcej na ten temat można znaleźć w artykule Tomasza Idziaszka w *Delcie* 9/2011.



Rozwiązanie zadania M 1347.

Na rysunku (a) pokazano, jak zamalować 16 pól.



Aby wykazać, że więcej niż 16 pól nie można zamalować, rozważmy ułożenie trzech kopii każdej z liter A, B, C, D, E, F, G, H na serwetce, pokazane na rysunku (b). Zgodnie z treścią zadania nie można zamalować trzech pól z tą samą literą, więc można zamalować co najwyżej $2 \cdot 8 = 16$ pól.



Która liczba jest większa?

$$K = \log_2 3 \cdot \log_5 7 \quad \text{czy} \quad L = \log_2 7 \cdot \log_5 3$$

Liczby pierwsze i jednoznaczność rozkładu – ogólniej

Stara Delta



fragmenty artykułu Władysława NARKIEWICZA z *Delty* 9/1979

Twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze w zbiorze liczb naturalnych wypowiada się najprościej w następujący sposób: każdą liczbę naturalną różną od jedności możemy przedstawić w postaci iloczynu $p_1 p_2 \dots p_r$ liczb pierwszych na jeden tylko sposób, o ile rozkłady, różniące się kolejnością czynników, uważać będziemy za równe. Podobne twierdzenie można wysłowić także i dla liczb całkowitych, niekoniecznie dodatnich: *każdą liczbę całkowitą, różną od 0, 1, -1, możemy przedstawić na jeden sposób w postaci iloczynu $a p_1 p_2 \dots p_r$, przy czym p_1, \dots, p_r są liczbami pierwszymi, a liczba a równa jest 1 lub -1.* (Oczywiście i w tym przypadku należy utożsamiać rozkłady, różniące się kolejnością czynników.) Nazwijmy pierścieniem liczbowym każdy zbiór zawarty w zbiorze liczb zespolonych, w którym wykonalne jest dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Oczywiście, zbiór \mathbb{Z} liczb całkowitych jest takim pierścieniem. Nasuwa się naturalne pytanie, czy w każdym pierścieniu liczbowym zachodzi twierdzenie analogiczne do wysłowionego przed chwilą w przypadku pierścienia \mathbb{Z} .

Rozpatrzmy dla przykładu pierścien liczb całkowitych Gaussa, złożony ze wszystkich liczb zespolonych postaci $A + Bi$, przy czym A, B są liczbami całkowitymi. O tym pierścieniu można udowodnić następujące twierdzenie, analogiczne do twierdzenia o jednoznacznym rozkładzie w \mathbb{Z} : jeśli z jest liczbą całkowitą Gaussa, różną od 0, 1, -1, $i, -i$, to możemy ją przedstawić w postaci

$$z = P_1 \cdot \dots \cdot P_r,$$

przy czym liczby P_i są liczbami pierwszymi Gaussa, tj. mają tę własność, że z rozkładu P_i na czynniki, $P_i = xy$, gdzie x, y są liczbami całkowitymi Gaussa, wynika, że jeden z tych czynników jest równy, 1, -1, i lub $-i$.

Jeżeli

$$z = P'_1 \cdot \dots \cdot P'_s$$

jest innym rozkładem tego typu, to $r = s$, a przy tym po odpowiednim przenumerowaniu liczb P'_1, \dots, P'_s zachodzą równości: $P'_1 = a_1 P_1, \dots, P'_r = a_r P_r$, przy czym każda z liczb a_i jest równa 1, -1, i lub $-i$.

Dla przykładu rozłożymy na czynniki pierwsze w pierścieniu Gaussa liczbę 2: mamy równość: $2 = (1 + i)(1 - i)$, a rozkład ten jest rozkładem na czynniki pierwsze, bo jeśli np. $1 + i = (a + bi)(c + di)$, to $2 = |1 + i| \cdot |1 - i| = |1 + i|^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, a zatem $a^2 + b^2 = 1$ lub też $c^2 + d^2 = 1$, co pokazuje, że jedna z liczb $a + bi, c + di$ jest równa 1, -1, i lub $-i$.

Możemy przy tym także napisać: $2 = i(1 - i)^2 = (-1)(1 + i)(-1 + i) = -i(1 + i)^2$, co pokazuje, że możliwości podane w sformułowaniu twierdzenia rzeczywiście występują.

By móc sensownie sformułować twierdzenie o jednoznaczności rozkładu dla dowolnego pierścienia liczbowego, należy uprzednio określić, co będziemy rozumieli przez liczby pierwsze w takim pierścieniu i jakie liczby będą grały rolę liczb 1, -1 w pierścieniu liczb całkowitych, czy też liczb 1, -1, $i, -i$ w pierścieniu Gaussa. W tym celu zauważmy, że odwrotność każdej z liczb 1, -1, $i, -i$ również leży w pierścieniu Gaussa.



Rozwiązanie zadania F 809.

Po zwiększeniu masy pierwszego cylindra równowaga nastąpi dopiero, gdy znajdzie się on na dnie naczynia, a cały gaz przejdzie do drugiego cylindra. Ponieważ ciśnienie gazu oraz jego temperatura nie zmieniają się, więc także objętość pozostanie stała. Zatem $S_1 h + S_2 h = S_2 h_1$, gdzie S_1 i S_2 to przekroje wewnętrzne cylindrów, a h_1 to wysokość, na którą wzniesie się drugi tłok. Początkowo ciśnienie gazu w obu naczyniach było jednakowe, tzn. $m_1 g / S_1 = m_2 g / S_2$, stąd $S_1 / S_2 = m_1 / m_2$. Zatem

$$h_1 = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1 \right) h = 0,15 \text{ m.}$$



Niech \log oznacza logarytm przy naszej ulubionej podstawie.

$$K = \frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 7}{\log 5}; \quad L = \frac{\log 7}{\log 2} \cdot \frac{\log 3}{\log 5}.$$

Zatem $K = L$.

To podsuwa następujące określenie: jeżeli R jest pierścieniem liczbowym, to liczba a należąca do niego nazywa się odwracalna w R , jeżeli $a \neq 0$ oraz $1/a$ należy do R . (Oczywiście, liczby 1 i -1 są odwracalne w każdym pierścieniu, a przykład pierścienia Gaussa pokazuje, że liczb odwracalnych może być więcej.) Teraz możemy określić liczby pierwsze w pierścieniu R : różną od zera liczbę a pierścienia R nazywamy liczbą pierwszą w R , jeżeli z równości $a = xy$ ($x \in R$, $y \in R$) wynika, że jedna z liczb x, y jest odwracalna w R .

Używając tych definicji, możemy teraz sformułować dla dowolnego pierścienia liczbowego R odpowiednik twierdzenia o jednoznaczności rozkładu: mówimy, że w R zachodzi twierdzenie o jednoznaczności rozkładu, jeżeli każda liczba $a \in R$, różna od zera i nieodwracalna da się zapisać w postaci

$$a = P_1 \cdot \dots \cdot P_r,$$

przy czym liczby P_1, \dots, P_r są liczbami pierwszymi w R , a przy tym jeżeli $a = P'_1 \cdot \dots \cdot P'_s$ jest innym takim rozkładem, to $r = s$ i po odpowiednim ponumerowaniu liczb P'_1, \dots, P'_r zachodzą równości: $P'_1 = c_1 P_1, \dots, P'_r = c_r P_r$, przy czym liczby c_1, \dots, c_r są odwracalne.

Następujący przykład świadczy o tym, że sformułowane powyżej twierdzenie nie we wszystkich pierścieniach liczbowych jest prawdziwe:

rozpatrzmy pierścień R złożony ze wszystkich liczb $a + bi\sqrt{5}$, przy $a, b \in \mathbb{Z}$. (Proponuję Czytelnikowi sprawdzenie, że R w istocie jest pierścieniem.) Liczba 6 ma w R dwa różne rozkłady:

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + i\sqrt{5})(1 - i\sqrt{5}).$$

Nietrudno sprawdzić, że występujące tu czynniki są liczbami pierwszymi w rozważanym pierścieniu. Jeżeli np. $2 = X \cdot Y = (x + yi\sqrt{5})(a + bi\sqrt{5})$, przy czym $x, y, a, b \in \mathbb{Z}$, to $4 = |x + yi\sqrt{5}|^2 |a + bi\sqrt{5}|^2 = (x^2 + 5y^2)(a^2 + 5b^2)$, a więc $x^2 + 5y^2 = a^2 + 5b^2 = 2$ lub też jedna z liczb $x^2 + 5y^2, a^2 + 5b^2$ jest równa 1, a druga równa 4. Ponieważ równanie $u^2 + 5v^2 = 2$ nie ma rozwiązań całkowitych, musi zachodzić druga możliwość, a wówczas jedna z liczb X, Y musi być równa 1 lub -1 . Podobnie sprawdzamy, że pozostałe czynniki naszych rozkładów są pierwsze. Pozostaje sprawdzić, że ilorazy czynników obu rozkładów nie są odwracalne, ale to wynika z uwagi, że żadna z liczb $\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{3}$ nie leży w R . Widzimy ostatecznie, że w pierścieniu R twierdzenie o jednoznaczności rozkładu nie zachodzi.



Rozwiązanie zadania M 1345.

Przypuśćmy przeciwnie, że istnieje liczba całkowita r , dla której $f(r) = 2012$. Korzystając z tego, że $x - y$ dzieli $f(x) - f(y)$, dla dowolnych liczb całkowitych x i y , mamy

$$r - t_j \mid 2012, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Liczba 2012 jest pierwsza, więc skoro liczby $r - t_j$ są parami różne, to bez straty ogólności możemy przyjąć, że

$$\begin{aligned} t_1 &= r - 2012, & t_3 &= r + 1, \\ t_2 &= r - 1, & t_4 &= r + 2013. \end{aligned}$$

Ponieważ $f(t_j) = 9$, więc po podzieleniu z resztą wielomianu f przez wielomian $(x - t_1)(x - t_2)(x - t_3)(x - t_4)$ mamy

$$f(x) = g(x) \cdot (x - r + 2013)(x - r + 1) \cdot (x - r - 1)(x - r - 2013) + 9,$$

dla pewnego wielomianu g o współczynnikach całkowitych. Podstawiając $x = r$, dostajemy

$$2012 = g(r) \cdot 2013^2 + 9,$$

co przeczy temu, że $g(r)$ jest liczbą całkowitą.

Wielomianów postaci $x^2 + x + p$, gdzie p jest liczbą pierwszą, mających tę własność, że dla wartości x z zakresu od 0 do $p - 2$ przyjmują wartości będące liczbami pierwszymi, wcale nie jest dużo. Euler w 1772 roku, oprócz wspomnianego w *Matej Delcie* $x^2 + x + 41$, znalazł jeszcze cztery wielomiany tego typu:

$$x^2 + x + 3, \quad x^2 + x + 5, \quad x^2 + x + 11, \quad x^2 + x + 17.$$

Okazuje się, że innych nie ma, ale dowód powstał dopiero w 1966 roku.

A dlaczego wartości x , dla których wielomian daje w wyniku liczbę pierwszą, kończą się na $p - 2$? Dla $x = p - 1$ mamy

$$(p - 1)^2 + (p - 1) + p = (p - 1)^2 + 2(p - 1) + 1 = (p - 1 + 1)^2 = p^2.$$

M. D.-B.



Która liczba jest większa?

$$M = (\sqrt{37} - 6)^{666} \quad \text{czy} \quad N = \frac{1}{100^{100}}$$



Wyjaśnienie w numerze.

Nie daj się zbałamucić kobiecie!

Sophie Germain (1776–1831), wbrew ówczesnym obyczajom matematyk, fizyk, metalurg i autorka ciekawych szkiców o kulturze, prawie na każdym kroku musiała udowadniać swą wiedzę i bronić swych dokonań przed rzeszami niedowiarków. Jeden z takich ataków odparła, zadając gronu matematyków zadanie:

wykazać, że dla każdego $n > 1$ liczba $G = n^4 + 4$ jest złożona.

Jej rozmówcy może by i rozwiązali to zadanie, gdyby nie „pomoc” ze strony Sophie:

Dla n parzystych G jest też parzysta, a dla n kończącego się w zapisie dziesiętnym na 1, 3, 7 lub 9, liczba n^4 kończy się na 1, a więc liczba G dzieli się przez 5. Pozostają więc wam do zbadania tylko liczby postaci $625(2k + 1)^4 + 4$, czyli $10000k^4 + 20000k^3 + 15000k^2 + 5000k + 629$. Dla $k = 0$ mamy faktycznie $629 = 17 \cdot 37$. Ale co dla większych k ?

I tu koledzy grzęźli. A Ty, Czytelniku?

M. K.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1345. Dany jest wielomian f o współczynnikach całkowitych, dla którego istnieją takie parami różne liczby całkowite t_1, t_2, t_3, t_4 , że

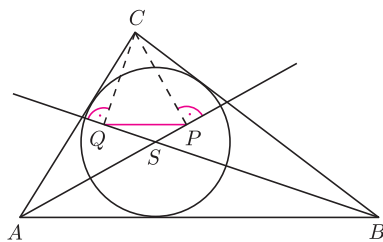
$$f(t_1) = f(t_2) = f(t_3) = f(t_4) = 9.$$

Udowodnić, że **nie** istnieje liczba całkowita r , dla której $f(r) = 2012$.

Rozwiązanie na str. 13

M 1346. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC . Punkty P i Q są rzutami prostokątnymi punktu C odpowiednio na proste AS i BS (rys. 1). Udowodnić, że prosta PQ jest równoległa do prostej AB .

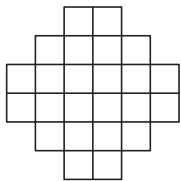
Rozwiązanie na str. 24



Rys. 1

M 1347. Ile co najwyżej pól serwetki pokazanej na rysunku 2 można zamalować tak, aby wzdłuż żadnej przekątnej nie było trzech kolejnych zamalowanych pól?

Rozwiązanie na str. 11



Rys. 2

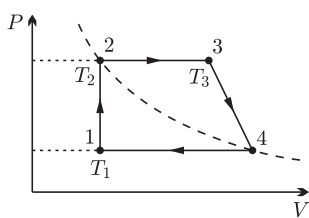
Redaguje Ewa CZUCHRY

F 809. Dwa pionowe cylindry o różnych przekrojach wewnętrznych przykryte są tłokami o masach $m_1 = 1$ kg oraz $m_2 = 2$ kg znajdującymi się na wysokości $h = 0,1$ m. Cylindry połączone są na dole cienką rurką, wewnątrz nich znajduje się gaz doskonały o stałej temperaturze, a na zewnątrz jest próżnia. Jaka będzie różnica wysokości tłoków po dociążeniu pierwszego z nich dodatkowym kilogramem?

Rozwiązanie na str. 12

F 810. N moli gazu doskonałego poddane jest przemianie cyklicznej $1 - 2 - 3 - 4 - 1$ składającej się z dwóch izobar $2 - 3$ oraz $4 - 1$, izochory $1 - 2$ i pewnego procesu $3 - 4$ przedstawionego na wykresie pV linią prostą (rys. 3). Temperatury gazu w punktach 1, 2, 3 są równe T_1, T_2, T_3 , odpowiednio, a punkty 2 i 4 leżą na tej samej izotermie. Wyznaczyć pracę wykonaną przez gaz.

Rozwiązanie na str. 10



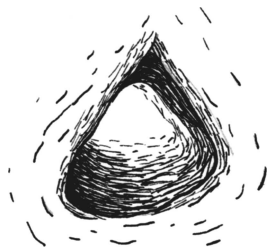
Rys. 3



Ponieważ $\sqrt{37} - 6 = \frac{1}{\sqrt{37} + 6} < \frac{1}{12} < \frac{1}{10}$, więc $M < \frac{1}{10^{666}}$,

co wobec $N = \frac{1}{10^{200}}$ daje $M < N$.

Informatyczny kącik olimpijski (50): Jaskinia



W tym kąciku omówimy zadanie *Jaskinia*, które pojawiło się w zeszłym roku na Akademickich Mistrzostwach Polski w Programowaniu Zespołowym. Tytułowa jaskinia składa się z n komnat połączonych $n - 1$ korytarzami, które tworzą drzewo. Grotołazi chcą podzielić się na kilka grup, a następnie chcą przydzielić każdej grupie zbiór komnat, tak by każda komnata została przydzielona dokładnie jednej ekipie grotołazów oraz by każda grupa dostała tyle samo komnat do zbadania i była w stanie poruszać się pomiędzy przydzielonymi komnatami bez przechodzenia przez komnaty innych ekip. Na ile grup mogą podzielić się grotołazi?

Poniższa obserwacja daje warunek konieczny i wystarczający na istnienie podziału:

Drzewo o n wierzchołkach można podzielić na spójne kawałki rozmiaru k wtedy i tylko wtedy, gdy w tym drzewie znajduje się dokładnie $\frac{n}{k} - 1$ krawędzi, które łączą poddrzewa o rozmiarach będących wielokrotnościami k .

Dowód jest prosty: jeśli podzieliłiśmy drzewo na kawałki rozmiaru k zgodnie z warunkami zadania, to tych kawałków jest $\frac{n}{k}$. Krawędzi, które łączą wierzchołki należące do różnych kawałków, jest dokładnie $\frac{n}{k} - 1$, a ponieważ poddrzewa połączone takimi krawędziami składają się z całych kawałków, wobec tego rozmiar każdego z tych poddrzew jest podzielny przez k . Krawędzie wewnątrz kawałków nie mają tej własności.

W drugą stronę: usuwamy kolejno wszystkie $\frac{n}{k} - 1$ „dobrych” krawędzi. Po każdym usunięciu dostajemy zbiór niepustych kawałków o rozmiarach podzielnych przez k . Na końcu zostanie $\frac{n}{k}$ kawałków, czyli wszystkie muszą mieć rozmiar k .

Powyższa obserwacja pozwala nam na stworzenie następującego rozwiązania: ukorzeniamy drzewo w dowolnym wierzchołku i dla każdego $k | n$ przechodzimy drzewo od liści do korzenia, zliczając „dobre” krawędzie, tzn. takie, które łączą poddrzewa o rozmiarach będących wielokrotnościami k (rozmiary poddrzew obliczamy na bieżąco prostym programowaniem dynamicznym).

Złożoność czasowa tego rozwiązania to $O(n\sigma_0(n))$, gdzie $\sigma_0(n)$ oznacza liczbę dzielników n . Wśród liczb $n \leq 10^7$ możemy znaleźć takie, które mają dość dużo dzielników (rekord to $\sigma_0(8648640) = 448$), zatem powyższe rozwiązanie jest niezbyt szybkie.

Można to zrobić sprytniej, wykonując tylko jedno przeszukiwanie drzewa. Rozważmy bowiem krawędź, która łączy dwa poddrzewa o rozmiarach i oraz $n - i$, i zastanówmy się, dla jakich k będzie ona „dobrą” krawędzią. Ano, dla takich k , które dzielą zarówno i ,

jak i $n - i$, zatem dla wszystkich dzielników liczby $\text{nwd}(i, n - i)$. Możemy zatem postąpić następująco. W tablicy t będziemy zliczać „dobre” krawędzie. W pierwszym kroku przechodzimy drzewo od liści do korzenia i dla każdej krawędzi zwiększamy licznik $t[\text{nwd}(i, n - i)]$. Przejście drzewa wykonujemy w czasie $O(n \log n)$, gdyż dla każdej krawędzi obliczenie największego wspólnego dzielnika możemy wykonać w czasie $O(\log n)$, korzystając z algorytmu Euklidesa.

Następnie przeglądamy dzielniki n w kolejności rosnącej i dla każdego takiego dzielnika k zwiększamy o wartość $t[k]$ liczniki $t[j]$ dla $j | k$. Jeśli dla każdego k w poszukiwaniu jego dzielników przejrzymy wszystkie liczby mniejsze od k , to ten krok wykonamy w czasie $\sum_{k|n} O(k)$, czyli czasie proporcjonalnym do sumy dzielników n , czyli $\sigma_1(n) = O(n \log \log n)$.

Odpowiedzią są wszystkie liczby $\frac{n}{k}$, które spełniają $t[k] = \frac{n}{k} - 1$. Złożoność czasowa tego rozwiązania to $O(n \log n)$.

Przejście drzewa moglibyśmy zrealizować w czasie liniowym, gdybyśmy znali dla każdego i wartość $\text{nwd}(i, n - i) = \text{nwd}(i, n)$. Można te wartości obliczyć następującym algorytmem, który przypomina metodę sita Eratostenesa:

```
for i := 1 to n do
  if n mod i = 0 then
    j := i;
    while j ≤ n do
      d[j] := i;
      j := j + i;
```

Po wykonaniu powyższego kodu będziemy mieli $d[j] = \text{nwd}(j, n)$ dla każdego $j = 1, \dots, n$. Dla każdego $i | n$ wewnętrzna pętla wykona się $\frac{n}{i}$ razy, zatem w całym algorytmie wykona się $\sigma_1(n)$ razy. Ostatecznie daje nam to algorytm o złożoności czasowej $O(n \log \log n)$.

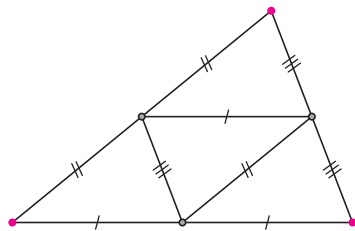
Tomasz IDZIASZEK



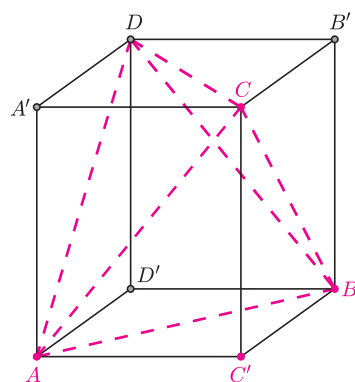
Która liczba jest większa?

$$P = \binom{1000}{500} \quad \text{czy} \quad R = 2^{1000}$$

Kącik przestrzenny (12) Czworosciany równościennie – część 1



Rys. 1



Rys. 2

Warto odnotować, że z warunku 6 wynika, że ściany każdego czworoscianu równościennego są ostrokątne. Natomiast warunek 14 jest równoważny temu, że wszystkie sfery dopisane są styczne do ścian w ortocentrach.



Dowód nieistnienia nieskończonego ciągu arytmetycznego złożonego z liczb pierwszych: wyraz o numerze m ciągu $a_k := m + n \cdot k$ dzieli się przez m .

Na płaszczyźnie, jeśli trójkąt ma równe boki, to jest równoboczny. W przestrzeni jednak czworoscian, którego ściany są przystające, wcale nie musi być foremny. Aby się o tym przekonać, wystarczy narysować dowolny nierównoboczny trójkąt ostrokątny, podzielić go na cztery przystające trójkąty (łącząc środki jego boków, jak na rysunku 1) i zauważyć, że otrzymujemy w ten sposób siatkę czworoscianu (dlaczego?). Inaczej, można spojrzeć na czworoscian $ABCD$ w prostopadłościanie $AC'BD'A'CB'D$ (rys. 2). Ma on przeciwległe krawędzie równej długości, a więc jego ściany są przystające. Takie czworosciany nazywamy **równościennymi**. O nich opowiemy w najbliższych dwóch odcinkach. W tym kąciku zrobimy krótki przegląd ich własności, a następnym razem przyjrzymy się paru zastosowaniom w zadaniach olimpijskich.

Jednym z ważniejszych faktów związanych z czworoscianem równościennym jest to, że równoległoscian na nim opisany jest prostopadłościanem. To pociąga za sobą wiele ważnych konsekwencji, np. środek sfery opisanej, środek sfery wpisanej oraz środek ciężkości czworoscianu są tym samym punktem – środkiem opisanego prostopadłościanu. Nietrudno również uzasadnić, że jeśli którekolwiek dwa z tych punktów się pokrywają, to czworoscian jest równościenny.

Można sformułować bardzo wiele warunków równoważnych temu, że czworoscian jest równościenny. Wybrane podajemy poniżej. W szczególności interesujące jest to, że wystarczy założyć równość pól ścian.

Twierdzenie. Dla dowolnego czworoscianu $ABCD$ następujące warunki są równoważne:

1. wszystkie ściany są przystające;
2. wszystkie ściany mają okręgi opisane o jednakowym promieniu;
3. wszystkie ściany mają równe pola;
4. wszystkie ściany mają równe obwody;
5. przeciwległe krawędzie są równe;
6. siatka czworoscianu jest trójkątem ostrokątnym podzielonym na cztery przystające trójkąty;
7. suma kątów płaskich w każdym wierzchołku jest równa 180° (wystarczy nawet w trzech);
8. $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC$;
9. równoległoscian opisany na czworoscianie jest prostopadłościanem;
10. rzut prostokątny czworoscianu na dowolną płaszczyznę równoległą do dwóch przeciwległych krawędzi jest prostokątem;
11. wszystkie bisorkowe są parami prostopadłe;
12. każda bisorkowa jest prostopadła do krawędzi, które łączy;
13. pewne dwa punkty spośród następujących: środek ciężkości, środek sfery wpisanej, środek sfery opisanej, się pokrywają;
14. sfera wpisana w czworoscian jest styczna do wszystkich ścian w środkach okręgów opisanych (wystarczy nawet do dwóch).

Zachęcamy Czytelników do samodzielnego zmierzenia się z tym twierdzeniem. Dużą część dowodu można znaleźć w artykule Waldemara Pompego („O czworoscianie równościennym”, *Delta* 3/1994; jest dostępny na stronie internetowej *Delt*y). Warto tam zajrzeć chociażby po to, żeby sprawdzić,



Jednym ze składników sumy

$$R = (1 + 1)^{1000} = \binom{1000}{0} + \binom{1000}{1} + \binom{1000}{2} + \dots + \binom{1000}{500} + \dots + \binom{1000}{1000}$$

jest liczba P .

Zatem $P < R$.

Warto wspomnieć, że można rozważać także **czworościany półrównościennie**, czyli takie, które mają dwie pary trójkątów przystających (albo inaczej: dwie pary przeciwległych krawędzi równych). Większość własności czworościanów równościennych ma swoje odpowiedniki dla czworościanów półrównościennych. Zachęcam Czytelników do samodzielnego zbadania tej klasy.

w jakiej kolejności najwygodniej wyprowadzać jedne warunki z innych – tutaj są pogrupowane ze względu na obiekty, których dotyczą.

Czworościany równościennie są na tyle regularne, że wiele wielkości z nimi związanych wyraża się stosunkowo prostymi, jak na czworościany, wzorami. Przyjmując, że każda ściana takiego czworościanu jest trójkątem o bokach długości a, b, c , można obliczyć, że

$$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)}{8}},$$

$$R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}},$$

$$S = \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)},$$

gdzie V , R i S oznaczają odpowiednio objętość, długość promienia sfery opisanej oraz pole powierzchni całkowitej. Dzieląc potrojoną objętość przez pole, otrzymamy wzór na promień sfery wpisanej. Można także sprawdzić, że środki sfer dopisanych leżą w wierzchołkach prostopadłościenu opisanego na czworościanie i każda z tych sfer ma promień dwa razy większy od promienia sfery wpisanej. Ponadto Czytelnik Wnikliwy może znaleźć wzory na długości bisekcyjnych, środkowych i wysokości.

Na koniec udowodnimy jeszcze jedno ciekawe twierdzenie związane z czworościanami równościennymi.

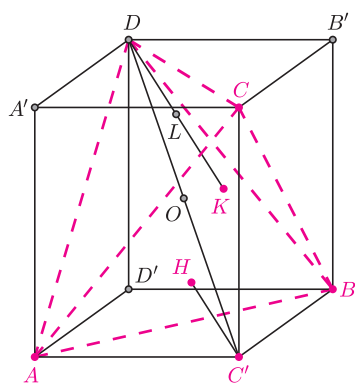
Twierdzenie (sfera dwunastu punktów). *W czworościanie równościennym spodki wysokości, środki wysokości i punkty przecięcia wysokości ścian tego czworościanu leżą na jednej sferze.*

Dowód. Rozważmy czworościan równościenny $ABCD$ wpisany w prostopadłościan $AC'B'D'A'CB'D'$ o środku O (rys. 3). Wystarczy, jeśli udowodnimy, że odległości punktu O od dwunastu rozważanych punktów są równe. Z uwagi na symetrię wystarczy dowieść, że $OH = OK = OL$, gdzie H jest ortocentrum trójkąta ABC , K – spodkiem wysokości poprowadzonej z punktu D , natomiast L jest jej środkiem. \square

Z pierwszego zadania omawianego w kąciku 5 (a mówiłem, że to zadanie jeszcze się przyda. . .) wiemy, że $C'H$ jest prostopadłe do ABC . Z drugiej strony nietrudno stwierdzić, że punkt L leży na płaszczyźnie $A'B'D'$ oraz $DL \perp A'B'D'$. W takim razie punkty H i L są symetryczne względem punktu O . Ponadto trójkąt HKL jest prostokątny, ponieważ punkty K i L leżą na wysokości czworościanu opuszczonej na ścianę ABC . Punkt O jest środkiem przeciwprostokątnej tego trójkąta, skąd wynika, że $OH = OK = OL$.

Jak widać, czworościan równościenny ma niesamowicie dużo różnych dobrych własności. Jednej rzeczy jednak na ogół nie posiada – nie ma ortocentrum. I chyba całe szczęście, bowiem jeśli już je ma, to musi być foremny. A tak mamy całą rodzinę dość regularnych czworościanów z mnóstwem ciekawych własności, których wiele odpowiedników na płaszczyźnie jest zarezerwowanych tylko dla trójkątów równobocznych.

Michał KIEZA



Rys. 3

Rozwiązanie zadania

Sophie Germain: oczywiście

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$



Która liczba jest większa?

$$S = \binom{2012}{1006} \quad \text{czy} \quad T = 2^{2000}$$

Czym są diamenty?

Najlepszymi przyjaciółmi dziewczyny, jak śpiewała Marilyn Monroe. Okazuje się, że mogą być równie bezcenne dla fizyków. Klejnociki te umożliwiły zbudowanie kwantowej pamięci [1] oraz pozwoliły na splątanie drgań w dwóch kryształach znajdujących się w makroskopowej odległości [2].

Oba te efekty kwantowe zostały zaobserwowane w temperaturze pokojowej. Było to możliwe dzięki przysłowiowej twardości diamentu, związanej ze sztywnością jego struktury. Okazuje się, że można w kryształach diamentu wzbudzić wibrację polegającą na wzajemnym przemieszczaniu się dwóch jego podsiatek, obejmującą praktycznie cały kryształ (rzędu 10^{16} atomów).

Termiczne wzbudzenie tego typu drgań wymaga bardzo wysokiej temperatury (około 2000 K), więc temperaturę pokojową można z tego punktu widzenia uznać za bliską zera bezwzględnego. Własności diamentu sprawiają, że drganie to ma częstość 40 THz (czyli okres 25 fs), a więc można mieć nadzieję na zaobserwowanie kwantowych efektów przed dekoherencją. Wibrację tę można wywołać za pomocą rozpraszania ramanowskiego, w wyniku którego foton „rozpada się” na foton o mniejszej energii i fonon (nazywany fononem optycznym).

Żeby zaobserwować splątanie drgań w dwóch różnych kryształach, trzeba zaprojektować drogę fotonów tak, żeby do niewrażliwych miejsc mógł dojść foton, przechodząc zarówno przez jeden, jak i przez drugi kryształ. Osiąga się to standardowo poprzez użycie odpowiedniej liczby płytek półprzepuszczalnych. W tym doświadczeniu bezpośrednio za impulsem wzbudzającym drgania emitowany był sygnał odczytujący, dla którego może zajść zjawisko odwrotne: foton łączy się w fononem i staje się fotonem o większej energii. Ponieważ prawdopodobieństwo zajścia rozpraszania ramanowskiego jest bardzo małe, więc praktycznie za każdym razem najwyżej jeden foton z każdego z ultrakrótkich (pikosekundowych) impulsów bierze udział w oddziaływaniu.

Jak w każdym tego typu eksperymencie, nieklasyczość zjawiska objawia się interferencją. W tym przypadku sytuacji, w której to jedyne wzbudzenie nastąpiło w jednym, z sytuacją, w której nastąpiło ono w drugim kryształach. Przy czym interferencja jest obserwowana tylko wtedy, gdy nie wiadomo, w którym kryształach to nastąpiło. Nie wiadomo, to znaczy, że nikt się o tym nie dowiedział z matką naturą włącznie.

Demonstracja ta [2] jest kolejnym krokiem w kierunku obserwacji zjawisk kwantowych w systemach makroskopowych.

Widzimy dwa kryształy o rozmiarach rzędu 3 mm leżące kilkanaście centymetrów jeden od drugiego i kontemplujemy pojedynczy fonon, który jest w dwóch miejscach naraz.

Diamenty są wieczne...

... ale przecież kiedyś powstać musiały. Z tymi pochodzenia ziemskiego w zasadzie nie ma problemu. Zastanawiające jest natomiast powszechne występowanie nanodiamentowych drobin w meteorytach (chondrytach). Do niedawna uważano, że muszą być one starsze od Układu Słonecznego, gdyż nikomu nie udało się wymyślić efektywnego sposobu powstawania ich w stosunkowo spokojnych (w porównaniu do np. wybuchów supernowych) procesach planetotwórczych. Okazało się jednak [3], że nanodiamenty nie występują w kometach, a przynajmniej jest ich dużo mniej w meteorytach kometarnego pochodzenia w porównaniu do tych niekometarnych. Mogłoby to świadczyć o powstawaniu tych ziarenek już w Układzie Słonecznym (bo materiał kometarny jest uznawany za bardziej pierwotny).

Zagadkę tę, być może, rozwiązuje analiza [4], w której autorzy, za pomocą symulacji, wskazują na istnienie nieznanego wcześniej mechanizmu produkcji kosmicznych nanodiamentów, który wyjaśnia bardzo dużo zagadkowych ich cech.

Tym mechanizmem są zderzenia fulerenowych cebulek. Po pierwsze, warzywa te są bardzo rozpowszechnione we Wszechświecie. Po drugie, okazuje się, że istnieje pewien dość wąski zakres prędkości względnych (około 5 km/s), przy których prawie całe zderzające się cebulki zamieniają się w nanodiamenty. Przy mniejszych prędkościach tylko mała część cebulek przechodzi tę przemianę fazową, a przy większych diament po powstaniu się roztopia. Odpowiednie prędkości względne są w dodatku typowe dla Układu Słonecznego. Ten sposób powstawania wyjaśnia domieszkowanie nanodiamentów np. ksenonem (który w dość naturalny sposób może znajdować się wewnątrz fulerenowych cebulek), występowanie różnych typów krystalicznej konfiguracji nanodiamentów, piramidalny kształt ziaren oraz ich bardzo małe rozmiary odpowiadające wielkością typowym rozmiarom fulerenowych cebulek. Opisany mechanizm powstawania ziaren diamentu może mieć miejsce zarówno po utworzeniu się protosystemu planetarnego, jak i przed jego powstaniem.

W każdym razie przekształcanie cebuli w diamenty wygląda na bardziej interesujące niż przemiana ołowiu w złoto.

Piotr ZALEWSKI

- [1] K.C. Lee, B.J. Sussman i inni, *Macroscopic non-classical states and terahertz quantum processing in room-temperature diamond*, Nature Photonics **6**(2012)41–44.
- [2] K.C. Lee, M.R. Sprague i inni, *Entangling macroscopic diamonds at room temperature*, Science **334**(2011)1253–1256.
- [3] Z.R. Dai, J.P. Bradley, D.J. Joswiak, D.E. Brownlee, H.G.M. Hill, M.J. Genge, *Possible in situ formation of meteoritic nanodiamonds in the early Solar System*, Nature **418**(2002)157–159.
- [4] N.A. Marks, M. Lattemann D.R. McKenzie, *Nonequilibrium route to nanodiamond with astrophysical implications*, Phys. Rev. Lett. **108**(2012)075503.



Suma $(1 + 1)^{2012} = \binom{2012}{0} + \binom{2012}{1} + \binom{2012}{2} + \dots + \binom{2012}{1006} + \dots + \binom{2012}{2012}$ składa się z 2013 składników, z których największym jest liczba S .

$$\text{Zatem } S > \frac{2^{2012}}{2013} > \frac{2^{2012}}{4096} = T.$$



Kur diabeł, ryba arktyczna
Myoxocephalus scorpius.

Im zimno niestraszne

Życie można spotkać na Ziemi właściwie wszędzie. Bakterie – w kwaśnej wodzie wrzących gejzerów, tatusiów-pingwinów stojących przez parę zimowych miesięcy bez pożywienia, z jajem na nogach, podczas gdy mamusie wybrały się na posiłek w oceanie. Białe niedźwiedzie pluszczące się wokół kry. W tej samej wodzie, często o temperaturze poniżej 0°C, żyją też zimnokrwiste ryby. Dlaczego nie zamarzają wewnątrz?

W ich komórkach istnieje gen kodujący białko, nazwane zgodnie z funkcją *antifreeze protein*, AFP. Kodujący je gen *afp* poprzedza tzw. promotor: fragment DNA, który nie koduje białka AFP, ale steruje jego powstawaniem wtedy, gdy temperatura otoczenia zbliża się do temperatury zamarzania wody. Po pobudzeniu przez niską temperaturę genu *afp* powstaje białko AFP uniemożliwiająca zamarzanie płynów ciała ryby. Do niedawna mechanizm tego zjawiska tłumaczono tak: AFP ma powinowactwo do zaczynających się tworzyć w niskiej temperaturze kryształków lodu, będących ośrodkami dalszej krystalizacji, od których rozpoczyna się i przyspiesza przejście wody ciekłej w lód. Kompleksy AFP z takimi ośrodkami krystalizacji hamują powstawanie lodu.

Ale co to znaczy mieć „powinowactwo”?

Na wiele podobnych pytań odpowiada technika dyfrakcji (rozproszenia) promieniowania X (rentgenowskiego). W tym przypadku metoda okazała się nieskuteczna, ponieważ intensywność sygnału zależy od liczby elektronów atomu, który na swej drodze napotyka promienie X. Wodór ma tylko 1 elektron i sygnał dyfrakcji X przez wodę (H₂O) jest prawie równy sygnałowi samego tlenu. Skoro istnieje taka powierzchnia białka, która wiąże specyficznie lód, to pomiar dyfrakcji X przez kompleks lód/AFP nie pozwoli na odróżnienie sygnału wody od tlenu. Z pomocą przyszła technika dyfrakcji neutronów, wchodzących w skład jąder atomów, w której siła sygnału zależy od specyficznych sił jądrowych, te z kolei od liczby neutronów w jądrze, różnej w różnych pierwiastkach, ale także w izotopach tego samego pierwiastka. Atom wodoru nie ma w jądrze neutronu, atom deuteru (D, izotop wodoru) jeden neutron ma. Sygnał dyfrakcji neutronowej deuteru różni się zatem znacząco od sygnału wodoru. Dzięki temu sygnał „ciężkiej” wody (D₂O) różni się od sygnału tlenu.

Pewien gatunek bakterii wyposażono w gen *afp*, hodowano w niskiej temperaturze w ciężkiej wodzie, dzięki czemu deuter wszedł do powstających w bakterii cząsteczek, także do wytwarzanego w dużej ilości białka AFP. Następnie, po wyodrębnieniu, białko to krystalizowano, bo to kryształy poddaje się analizie dyfrakcyjnej. Preparaty białka wytworzonego w zwykłej i ciężkiej wodzie nie różniły się strukturalnie

jako kryształy. Z innych badań wiadomo, że struktura kryształów białek jest niemal identyczna z ich strukturą po rozpuszczeniu w wodzie, zakłada się, że także z ich strukturą w komórce.

Krystaliczna forma białka AFP zasadniczo różni się od większości białek. Ta większość ma tzw. powierzchnie hydrofilowe („lubiące wodę”), które w zwiniętej formie białka, a także w kryształach, wystawione są na zewnątrz cząsteczki, kryjąc wewnątrz powierzchnie o odwrotnej charakterystyce, hydrofobowe („niełubiące wody”). W białku AFP jest na odwrót; hydrofobowe płaszczyzny wystawione są ku środowisku. Tymi płaszczyznami białko AFP wiąże się z kryształami lodu, blokując ich powiększanie się, nie wiąże się z ciekłą wodą. Potwierdzają to skomplikowane badania struktur AFP oddziałującego albo z wodą, albo z lodem.

Nie trzeba było długo czekać na biotechnologiczne zastosowania białka AFP. Używają je w produkcji lodów, aby uzyskać gładką masę. Można gen *afp* wstawić do genomu roślin wrażliwych na wczesne przymrozki. I można jeszcze wykorzystać promotor *afp*, dołączając go do genów innych białek, które to geny chcemy pobudzić do aktywności niską temperaturą. Fantazja człowieka nadąża za cudami przyrody, wąską ścieżką praktycznych zastosowań.

Magdalena FIKUS

Na podstawie artykułu z nr 20 *Science in School*, 2011.
Czasopismo można otrzymywać po skontaktowaniu się z redakcją www.scienceinschool.org.



Która liczba jest większa?

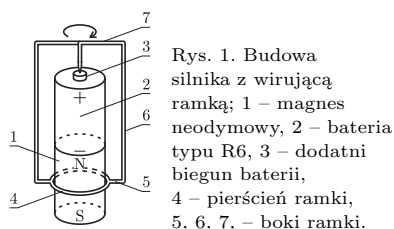
$$U = \binom{3000}{1000} \text{ czy } W = 7^{1000}$$

Silnik unipolarny z wirującą puszką

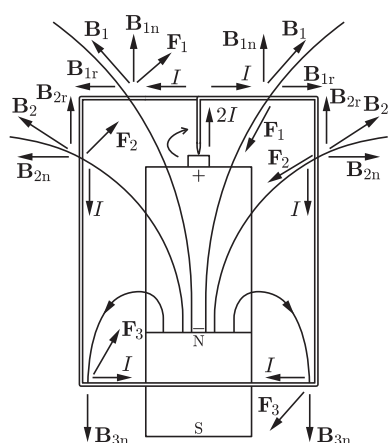
Stanisław BEDNAREK

Serię artykułów o silnikach unipolarnych zakończymy opisem dość efektownego układu demonstrującego działanie takiego silnika. Przed przystąpieniem do doświadczeń należy koniecznie przeczytać wskazówki, dotyczące bezpiecznego posługiwania się magnesami neodymowymi, zawarte w artykule w *Delcie* 1/2012.

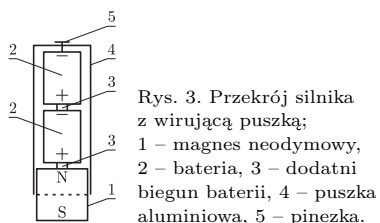
Potrzebne materiały i narzędzia: okrągłe baterie różnej wielkości (zwykle lub alkaliczne), walcowe magnesy neodymowe (pokryte ochronną powłoką niklową) o średnicach zbliżonych do średnic baterii, metalowe pinezki lub wkręty, stalowe nakrętki, nieferromagnetyczny drut miedziany lub mosiężny (np. srebrzanka), puszka aluminiowa, np. z colą, srebrowy lub grafitowy klej przewodzący, lutownica, cyna do lutowania, nożyczki, pilnik do metalu, nóż z ostrym końcem, pęseta, cienki pisak i młotek; srebrzankę i klej można kupić w sklepie z artykułami elektronicznymi.



Rys. 1. Budowa silnika z wirującą ramką; 1 – magnes neodymowy, 2 – bateria typu R6, 3 – dodatni biegun baterii, 4 – pierścień ramki, 5, 6, 7, – boki ramki.



Rys. 2. Oddziaływanie ramki z polem magnetycznym; I – natężenie prądu, B_1, B_2, B_3 – wektory indukcji pola magnetycznego na poszczególnych bokach ramki, B_{1n}, B_{1r} – składowe wektory indukcji prostopadłe (równoległe) do boków ramki, F_1, F_2, F_3 – siły elektrodynamiczne działające na boki ramki.



Rys. 3. Przekrój silnika z wirującą puszką; 1 – magnes neodymowy, 2 – bateria, 3 – dodatni biegun baterii, 4 – puszka aluminiowa, 5 – pinezka.

Budowa najprostszej wersji silnika przedstawiona jest na rysunku 1. Magnes neodymowy musi mieć średnicę nie mniejszą niż średnica baterii. Ramkę, stanowiącą wirnik silnika, wykonujemy w następujący sposób. Nawijamy niezbyt ciasno jeden zwoj nieferromagnetycznego drutu na bocznej powierzchni magnesu, a koniec zwoju przylutowujemy do początku drutu. Prawdłowo wykonany zwoj powinien dać się lekko obracać wokół bocznej powierzchni magnesu. Następnie drut zaginamy, tak jak na rysunku 1, a po wykonaniu wszystkich zagięć koniec ostatniego odcinka przylutowujemy do pierścienia i odcinamy niewykorzystaną część drutu. Wysokość ramki powinna być większa niż wysokość baterii, ale mniejsza od łącznej wysokości baterii i magnesu. Baterię, zwróconą ujemnym biegunem w dół, stawiamy na magnecie, a na całość nakładamy ramkę. Żeby oś ramki nie zsuwała się ze środka baterii, można w niej zrobić ostrożnie, za pomocą gwoździa i młotka, małe wgłębienie.

Ruch ramki z prądem spowodowany jest jej oddziaływaniem z polem magnetycznym (rys. 2). Prąd elektryczny płynie od dodatniego bieguna baterii przez każdy z boków ramki i przez powłokę ochronną magnesu dopływa do bieguna ujemnego. Każdy z boków ramki znajduje się w polu magnetycznym wytwarzanym przez magnes. Wektor indukcji tego pola ma kierunek ukośny względem boku ramki z prądem, powstaje więc siła elektrodynamiczna skierowana poziomo. Ponieważ składowe indukcji pola magnetycznego prostopadłe do boku ramki mają dla przeciwległych boków ramki przeciwne zwroty, więc powstające siły elektrodynamiczne także mają zwroty przeciwne, wobec czego ich moment jest niezerowy i powoduje obrót ramki.

W bardziej widowiskowej wersji silnika ramka z drutu zastąpiona jest puszką od napojów (rys. 3). Puszki nie otwieramy w zwykły sposób, tylko opróżniamy ją przez dwa otworki przebite gwoździem w środkowej części dna puszki. Następnie w dnie puszki wycinamy okrągły otwór o średnicy nieco większej niż średnica magnesu i wyrównujemy jego brzegi pilnikiem. Końcem noża zeskrobujemy od wewnątrz warstwę tlenków w środkowej części wieczka puszki, po czym na środku wieczka przyklejamy wewnątrz klejem przewodzącym lebek pinezki lub wkrętu. Po utwardzeniu się kleju puszkę nakładamy od góry na stojący na stole układ, złożony z magnesu i osiowo ustawionych na nim baterii. Za pomocą nakrętek włożonych między górną powierzchnię magnesu i baterię dobieramy wysokość tego zestawu tak, żeby po nałożeniu puszki i oparciu się ostrza pinezki lub wkrętu na górnej baterii, dolny brzeg puszki był na możliwie niewielkiej wysokości. Wówczas wydaje się, że puszka obraca się, lewitując, co można wykorzystać do efektownych pokazów.

Suma

$$(2 + 1)^{3000} = \binom{3000}{0} \cdot 2^{3000} + \binom{3000}{1} \cdot 2^{2999} + \binom{3000}{2} \cdot 2^{2998} + \dots$$

$$\dots + \binom{3000}{1000} \cdot 2^{2000} + \dots + \binom{3000}{3000}$$

jest większa od każdego składnika, więc $\binom{3000}{1000} \cdot 2^{2000} < 3^{3000}$,

$$\text{skąd } U = \binom{3000}{1000} < \frac{3^{3000}}{2^{2000}} = \left(\frac{27}{4}\right)^{1000} < 7^{1000} = W.$$