

Twierdzenie Brianchona

Joanna JASZUŃSKA

Poprzedni *deltoid* poświęcony był osiom potęgowym, między innymi twierdzeniu, które w skrócie brzmi tak: *osie potęgowe trzech okręgów przecinają się w jednym punkcie*. Ciekawym jego zastosowaniem jest dowód twierdzenia Brianchona.

Twierdzenie Brianchona. *Sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu. Wówczas przekątne AD , BE i CF przecinają się w jednym punkcie.*

Dowód. Oznaczmy okrąg przez Γ , a jego punkty styczności do boków sześciokąta jak na rysunku 1. Ustalmy pewną długość d . Niech punkt K' leży na półprostej $AK \rightarrow$ tak, by $AK' = AK + d$; stąd $KK' = d$. Analogicznie zdefiniujemy punkty L', M', N', Q', R' odpowiednio na półprostych $CL \rightarrow, CM \rightarrow, EN \rightarrow, EQ \rightarrow, AR \rightarrow$ (można wybrać d tak, by $K' \neq N', L' \neq Q', M' \neq R'$).

Istnieje okrąg Γ_1 styczny do prostych CL, EQ odpowiednio w punktach L', Q' – jest on obrazem Γ w jednokładności względem punktu przecięcia prostych CL, EQ lub przesunięciem Γ o d , jeśli proste te są równoległe. Analogicznie istnieje okrąg Γ_2 styczny do prostych CM, AR w punktach M', R' , oraz Γ_3 , styczny do AK, EN w K', N' .

Ponieważ $CL = CM$ oraz $LL' = MM' = d$, więc $\text{Pot}(C, \Gamma_1) = CL^2 = (CL + LL')^2 = (CM + MM')^2 = CM'^2 = \text{Pot}(C, \Gamma_2)$. Podobnie ponieważ $FQ = FR$ oraz $QQ' = RR' = d$, otrzymujemy $\text{Pot}(F, \Gamma_1) = \text{Pot}(F, \Gamma_2)$. Prosta CF jest więc osią potęgową okręgów Γ_1 i Γ_2 . Analogicznie prosta AD jest osią potęgową Γ_2 i Γ_3 oraz BE jest osią potęgową Γ_1 i Γ_3 . Wobec tego proste AD, BE i CF , jako osie potęgowe trzech okręgów, przecinają się w jednym punkcie. \square

Uwaga. Twierdzenie Brianchona jest też prawdziwe dla sześciokątów zdegenerowanych, a także – ogólniej – dla sześciokątów opisanych na elipsach.

1. Okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N (rys. 2). Udowodnij, że proste AC, BD, KM, LN przecinają się w jednym punkcie.

2. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków AB, BC, CA odpowiednio w punktach K, L, M . Wykaż, że proste AL, BM, CK przecinają się w jednym punkcie.

3. Trapez $ABCD$ jest opisany na okręgu o środku O i promieniu 1. Przekątne tego trapezu przecinają się w punkcie X , przy czym $XO = t$. Wyznacz stosunek $AB : CD$ długości podstaw tego trapezu, jeśli $AB \geq CD$.

4. Okrąg wpisany w romb $ABCD$ jest styczny do boku AB w punkcie K . Styczna do tego okręgu przecina boki BC i CD odpowiednio w punktach S i T . Wykaż, że $AT \parallel KS$.

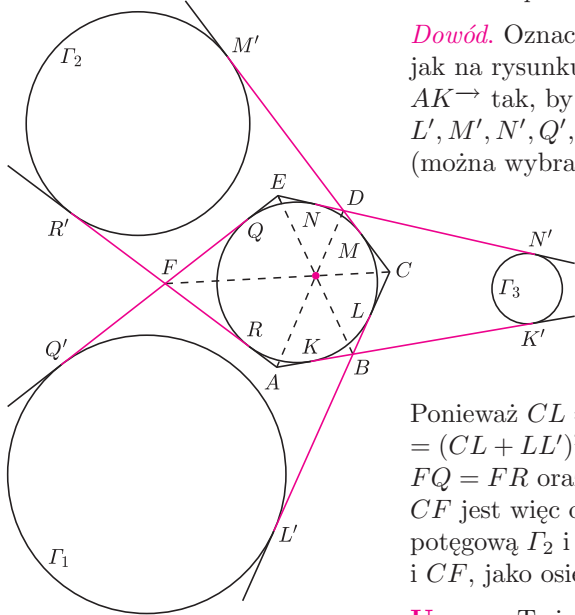
Rozwiązania niektórych zadań

R1. Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $AKBCMD$, proste AC, BD i KM przecinają się w jednym punkcie. Z kolei z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $ABLCDN$ wynika, że przez punkt przecięcia prostych AC, BD przechodzi także prosta LN , co kończy dowód. \square

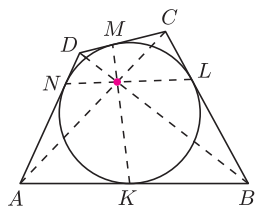
R3. Oznaczmy przez K, L odpowiednio punkty styczności podstaw AB, CD z okręgiem (rys. 3). Wtedy $KL \perp AB$ oraz KL przechodzi przez punkt O . Z twierdzenia Brianchona dla czworokąta, KL przechodzi też przez punkt X . Trójkąty ABX i CDX są podobne, więc $XK \geq XL$ oraz

$$AB : CD = XK : XL = (1 + t) : (1 - t). \square$$

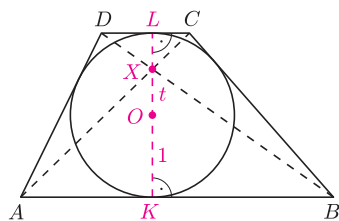
R4. Z twierdzenia Brianchona dla zdegenerowanego sześciokąta $AKBSTD$, proste AS, KT, BD przecinają się w jednym punkcie X (rys. 4). Z twierdzenia Talesa ponieważ $AD \parallel BS$ oraz $DT \parallel AB$, więc $AX/XS = DX/XB = TX/XK$. Stąd i z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa mamy $AT \parallel KS$. \square



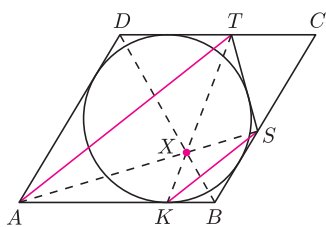
Rys. 1. Kolorowe odcinki są długości d .



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4