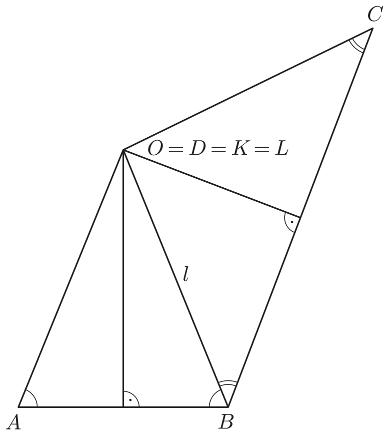
7 stycznia 2012 roku około 1400 uczniów wzięło udział w drugim etapie VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Najciekawszym i jednocześnie najtrudniejszym zadaniem okazało się zadanie z planimetrii oznaczone numerem 5. Rozwiązało je niewielu uczniów, przy czym żaden z nich nie rozważył wszystkich możliwych konfiguracji. Poniżej postaramy się zadanie to dokładnie zanalizować.

Zadanie 5. *Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, w którym zachodzi równość*

$$\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC.$$

Punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkacie ABC. Wykaż, że punkt O jest jednakowo odległy od prostych AD i CD.

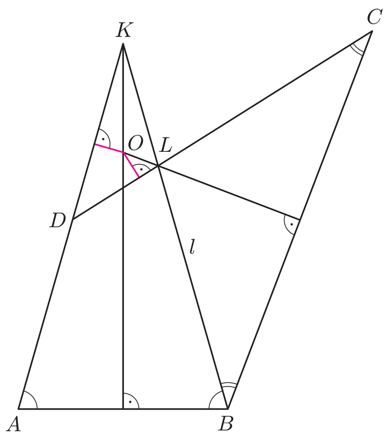
Podstawowy pomysł polega na podziale kąta ABC na takie dwie części, że kąty „bliższe” kątom DAB i DCB są im odpowiednio równe. Pozwala na to podana w zadaniu równość kątów. Aby zrealizować powyższy pomysł, należy dorysować prostą l przechodzącą przez punkt B i przecinającą bok AD w punkcie K, a bok CD w punkcie L, tak by trójkąty AKB i BLC były równoramienne. Wtedy dwusieczna kąta AKB jest symetralną boku AB, a dwusieczna kąta BLC – symetralną boku BC. Oznacza to, że środek O okręgu opisanego na trójkacie ABC leży na przecięciu dwusiecznych kątów AKB i BLC. W sytuacji, gdy kąty DAB i BCD są ostre, możliwe są trzy przypadki przedstawione na rysunkach 1, 2 i 3.



Rys. 1

W przypadkach 2 i 3 punkt O jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt KDL, gdyż leży na przecięciu dwusiecznych. Jest on więc jednakowo odległy od prostych AD i CD.

Żaden z uczniów rozwiązujących to zadanie nie rozważył sytuacji, gdy trójkąta KDL po prostu nie ma, bądź jeden z kątów DAB lub BCD nie jest ostry. Trójkąt KDL nie powstaje, gdy $O = D = K = L$. Ale wtedy teza jest oczywista, bo żądane odległości są równe 0.

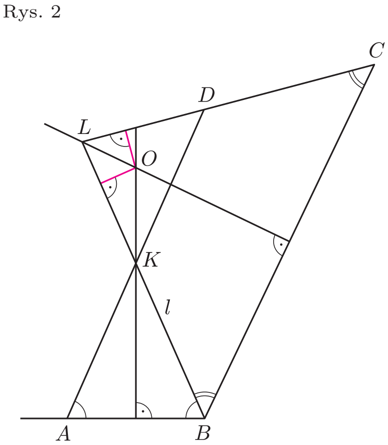


Rys. 2

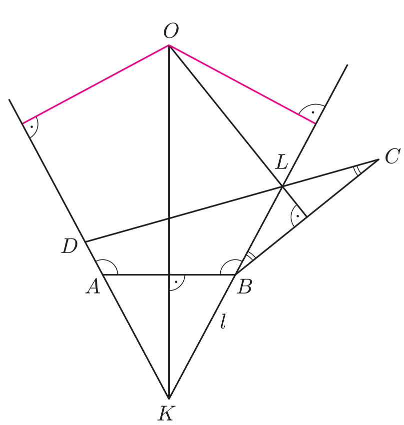
Pozostają do rozważenia konfiguracje, w których jeden z kątów DAB lub BCD jest rozwarty lub prosty. W tej pierwszej sytuacji załóżmy, bez zmniejszania ogólności, że rozwarty jest kąt DAB (rysunek 4). Wtedy punkt O jest środkiem okręgu dopisanego do trójkąta DKL i stąd wynika teza.

Najtrudniejszy do rozważenia jest przypadek, gdy jeden z kątów DAB lub BCD jest prosty (rysunek 5). Załóżmy np., że $\sphericalangle DAB = 90°$. Wtedy symetralna boku AB jest równoległa do prostych AD i BL i równo od nich odległa. W takim razie odległość punktu O od prostej AD jest taka sama, jak odległość punktu O od prostej BL. Ta ostatnia odległość jest z kolei równa odległości punktu O od prostej DC, gdyż OL jest również dwusieczną kąta wierzchołkowego do BLC. To spostrzeżenie kończy rozwiązanie zadania.

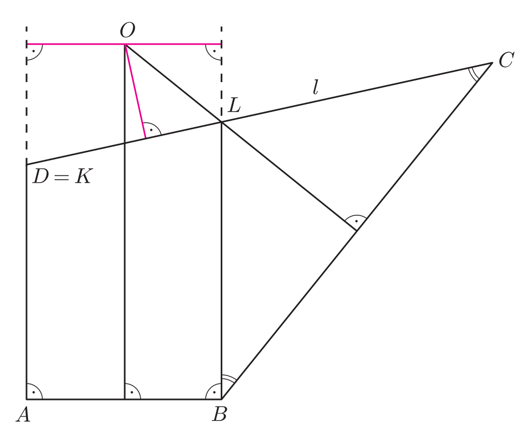
Andrzej FRYSZKOWSKI



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5