Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2012

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 639, 640

Redaguje Marcin E. KUCZMA

639. W trójkącie ABC punkt I jest środkiem okręgu wpisanego. Prosta CI przecina bok AB w punkcie D. Prowadzimy przez punkt D dowolną prostą, przecinającą okrąg opisany na trójkącie IAB w punktach P i Q. Wykazać, że prosta CI jest dwusieczną kąta PCQ.

640. Ciąg liczb całkowitych dodatnich $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ spełnia warunek

$$\frac{1}{a_1a_2} - \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{a_na_{n+1}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3\ldots$$

Dowieść, że spełnia on również liniową zależność rekurencyjną

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n \qquad \text{dla } n = 1, 2, 3\ldots$$

Wyznaczyć wszystkie pary współczynników (A, B) oraz wszystkie pary wyrazów początkowych (a_1, a_2), dla których ta rekurencja liniowa generuje ciąg (a_n), spełniający zadany na wstępie warunek.

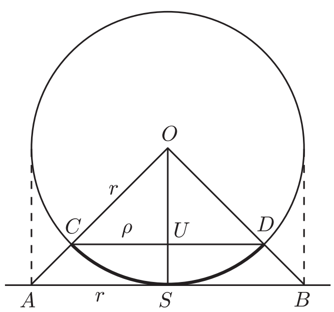
Zadanie 640 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2011

Przypominamy treść zadań:

631. Czy istnieje ośmiościan opisany na kuli, której rzut prostokątny na płaszczyznę każdej ze ścian ośmiościanu jest kołem zawartym w tej ścianie?

632. Mamy cztery liczby rzeczywiste; można z nich wybrać parę liczb na sześć sposobów. W każdej parze dodajemy obie liczby; dostajemy układ sześciu liczb. Suma tych sześciu liczb jest znana, równa A; także suma ich kwadratów jest znana, równa B. Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjąć suma sześcianów tych sześciu liczb.



631. Przypuśćmy, że istnieje taki ośmiościan, opisany na kuli o środku O i promieniu r. Wybierzmy jedną ze ścian, styczną do owej kuli w punkcie S. Rzut kuli na płaszczyznę tej ściany jest kołem k o środku S i promieniu r (rysunek powyżej przedstawia przekrój płaszczyzną, przechodzącą przez prostą OS; odcinek AB jest średnicą koła k).

Stożek o podstawie k i wierzchołku O wycina na powierzchni kuli (O, r) obszar f – czaszę kulistą, ograniczoną okręgiem, którego średnicą jest (na rysunku) odcinek CD o środku U. Czasze, uzyskane w ten sposób dla ośmiu ścian, są rozłącznymi obszarami na sferze. Suma ich pól nie przekracza pola całej sfery, równego $4\pi r^2$.

Wszelako koło o średnicy CD jest podstawą stożka, z wierzchołkiem w punkcie S, o promieniu podstawy $\rho = |UC| = r/\sqrt{2}$ i wysokości $h = |US| = r - r/\sqrt{2}$. Powierzchnia boczna tego stożka ma pole $\pi\rho\sqrt{\rho^2 + h^2}$, czyli $\pi r^2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}}$. Powierzchnia obszaru f jest jeszcze większa. Wychodzi nierówność $8\pi r^2\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} < 4\pi r^2$; po przekształceniu: $3 < 2\sqrt{2}$. Sprzeczność; zatem taki ośmiościan nie istnieje.

(Rachunkiem całkowym można obliczyć, że pole obszaru f wynosi $(2 - \sqrt{2})\pi r^2$, co jest większe niż 1/7 pola całej sfery; wielościan o rozważanej własności może mieć więc co najwyżej sześć ścian).

632. Cztery dane liczby to a_1, a_2, a_3, a_4. Nowe sześć liczb – to sumy $a_i + a_j$ $(i < j)$. Przyjmijmy oznaczenia: $\sum a_i = S$, $\sum a_i^2 = T$, $\sum_{i<j} a_ia_j = U$. Wówczas $S^2 = T + 2U$,

$$A = \sum_{i<j}(a_i + a_j) = 3S,$$

$$B = \sum_{i<j}(a_i^2 + 2a_ia_j + a_j^2) = 3T + 2U.$$

Stąd $T = \frac{1}{2}(B - S^2) = \frac{1}{2}B - \frac{1}{18}A^2$.

Niech C będzie sumą sześcianów tych sześciu liczb: $C = C_{\mathrm{I}} + C_{\mathrm{II}} + C_{\mathrm{III}}$, gdzie

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{I}} &= (a_1 + a_2)^3 + (a_3 + a_4)^3 = \\ &= S \cdot [(a_1 + a_2)^2 - (a_1 + a_2)(a_3 + a_4) + (a_3 + a_4)^2] = \\ &= S \cdot (T - U + 3a_1a_2 + 3a_3a_4); \\ C_{\mathrm{II}} &= S \cdot (T - U + 3a_1a_3 + 3a_2a_4); \\ C_{\mathrm{III}} &= S \cdot (T - U + 3a_1a_4 + 3a_2a_3). \end{aligned}$$

Dodajemy wyrażenia $C_{\mathrm{I}}, C_{\mathrm{II}}, C_{\mathrm{III}}$ i otrzymujemy

$$C = 3S \cdot (T - U) + S \cdot (3U) = 3ST = AT = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{18}A^3.$$

Jest to jedyna możliwa wartość sumy C.

Klub 44

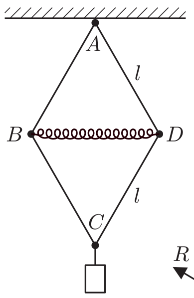
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2012

Zadania z fizyki nr 536, 537

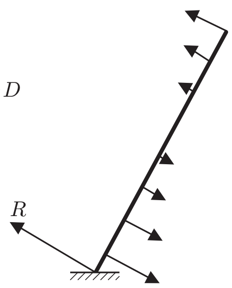
Redaguje Ewa CZUCHRY

536. Na pionowej, obracającej się ze stałą prędkością ω osi zamocowany jest poziomo sztywny, nieważki pręt. Wzdłuż niego mogą poruszać się bez tarcia dwie kuleczki, każda o masie m, połączone sprężyną o stałej sprężystości k – obie leżą po tej samej stronie osi obrotu. Taka sama sprężyna łączy kulkę bliższą osi z punktem zamocowania osi i pręta. Nierozciągnięte sprężyny mają długość l_0 każda. Znaleźć długości obu sprężyn podczas ruchu. Dla jakich parametrów uzyskane rozwiązanie ma sens fizyczny?

537. Cztery nieważkie pręty o długości l, połączone przegubami w romb, zostały za przegub A podwieszone na suficie (rys. 1). Przeciwległy przegub C obciążono ciężarkiem N, a pozostałe przeguby B i D rozparto sprężyną o długości $\frac{3}{2}l$ i stałej sprężystości k. W położeniu równowagi okazało się, że pręty są nachylone do pionu pod kątem $\alpha = 30°$. Znaleźć okres małych drgań ciężarka.



Rys. 1



Rys. 2

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 524 ($WT = 1{,}90$) i 525 ($WT = 3{,}30$) z numeru 10/2011

Marian Łupieżowiec	Gliwice	39,60
Jacek Piotrowski	Rzeszów	39,10
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	35,03
Michał Koźlik	Gliwice	32,78
Ryszard Woźniak	Kraków	18,18

Rozwiązania zadań z numeru 12/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

528. Cienki, jednorodny pręt o długości l i masie m postawiono pionowo na poziomym podłożu i zaczął się on przewracać bez poślizgu. Pręt nie wygina się, a przy przekroczeniu w jakimkolwiek punkcie pewnej wartości momentu siły zginającej M ulega złamaniu w tym punkcie. Obliczyć minimalną wartość M niezbędną do tego, aby pręt nie złamał się przed upadkiem. W którym punkcie pręt się złamie, gdy M ma wartość nieco mniejszą?

529. Aby wyznaczyć wartość oporu amperomierza, włączono go w pewien obwód razem z bocznikiem – równoległym opornikiem o dokładnie znanym oporze R. Odczytano wskazanie amperomierza I dla różnych wartości R, a wyniki przedstawiono w tabeli:

R, Ω	1	1,5	2	3	5	10
I, mA	54	70	82	99	119	141

Czy natężenie prądu płynącego przez amperomierz i bocznik (łącznie) pozostawało stałe? Ile wynosi opór własny amperomierza? Jaką metodą najlepiej uwzględnić wszystkie pomiary? Dopuszczalne są tylko typowe „ogólnoużytkowe” funkcje arkusza kalkulacyjnego lub kalkulatora.

528. Z bilansu energii
$$\Delta E_{\mathrm{graw}} = mg\frac{l}{2}(1-\cos\alpha) = \frac{1}{2}I\omega^2,$$
gdzie $I = \frac{1}{3}ml^2$ jest momentem bezwładności pręta względem punktu podparcia, wyznaczamy prędkość kątową pręta ω w zależności od kąta odchylenia od pionu α:
$$\omega^2 = 3\frac{g}{l}(1-\cos\alpha).$$
Różniczkując po czasie, znajdujemy przyspieszenie kątowe ε:
$$\varepsilon = \frac{3g}{2l}\sin\alpha.$$
Podzielmy pręt na niewielkie elementy o długości $\mathrm{d}x$ i masie $\mathrm{d}m$ odległe od punktu podparcia o x i dla każdego z nich wyznaczmy „siłę wyginającą” $\mathrm{d}F_{\mathrm{w}}$, tzn. prostopadłą do pręta składową siły wywieranej przez dany element na sąsiednie. Jeśli dodatni zwrot tej siły jest w stronę spadku pręta, to jest ona równa różnicy prostopadłej składowej siły ciężkości $\mathrm{d}m\cdot g\sin\alpha$ i iloczynu $\mathrm{d}m$ przez prostopadłą składową przyspieszenia:
$$\mathrm{d}F_{\mathrm{w}} = \mathrm{d}m(g\sin\alpha - \varepsilon x) = \frac{m\mathrm{d}x}{l}g\sin\alpha\left(1-\frac{3x}{2l}\right).$$
Siły te zostały przedstawione na rysunku 2, wraz z prostopadłą do pręta składową siły reakcji podłoża R. Moment M siły zginającej pręt w punkcie y jest równy sumie momentów sił $\mathrm{d}F_{\mathrm{w}}$ dla wszystkich x większych od y:
$$M(y) = \int_y^l (x-y)\,\mathrm{d}F_{\mathrm{w}} = \\ = \frac{m}{l}g\sin\alpha\int_y^l (x-y)\left(1-\frac{3x}{2l}\right)\mathrm{d}x.$$
W wyniku całkowania otrzymujemy
$$M(y) = -\frac{y(l-y)^2}{4l^2}mg\sin\alpha.$$
Maksymalna wartość M występuje tuż przed upadkiem ($\sin\alpha = 1$) i w punkcie $y = \frac{1}{3}l$. Wynosi ona
$$|M_{\max}| = \frac{1}{27}mgl,$$
a jeśli pręt ma się nie złamać, to jego wytrzymałość na zginanie nie może być mniejsza.

529. Niech R_{A} będzie szukanym oporem amperomierza, a I_{c} – natężeniem prądu całkowitego, czyli sumą natężenia prądu płynącego przez amperomierz (I) i przez bocznik. Napięcie na amperomierzu i boczniku jest jednakowe, zatem
$$IR_{\mathrm{A}} = (I_{\mathrm{c}} - I)R \quad \text{czyli} \quad \frac{R_{\mathrm{A}}}{R} = \frac{I_{\mathrm{c}}}{I} - 1.$$
Jeśli I_{c} jest stałe, to wykres zależności $1/I$ od $1/R$ powinien być liniowy, co dla danej serii pomiarów sprawdza się bardzo dobrze. Z ekstrapolacji prostej do przecięcia z osią $1/R$ (tzn. do punktu, w którym $1/I = 0$) znajdujemy $R_{\mathrm{A}} \approx 2{,}16$ Ω.