Rozwiązanie zadania F 810.
Praca jest równa polu powierzchni zawartej wewnątrz diagramu pV, a więc:

$$W = (p_2 - p_1)(V_3 - V_2 + V_4 - V_1)/2.$$

Objętości gazu to

$$V_3 = V_2T_3/T_2 = V_1T_3/T_1,$$
$$V_4 = V_1T_4/T_1 = V_1T_2/T_1,$$

a ciśnienie

$$p_2 = p_1T_2/T_1.$$

Zatem:

$$W = p_1V_1\left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 2\right)\frac{T_2 - T_1}{T_1},$$

ale $p_1V_1 = NRT_1$, więc ostatecznie

$$W = NR\left(\frac{T_2}{T_1} + \frac{T_3}{T_2} - 2\right)(T_2 - T_1).$$

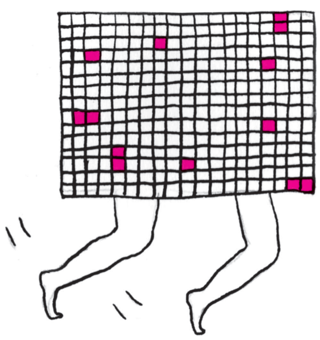
Jak szybko działa sito?

Jakub RADOSZEWSKI

Jedną z najlepiej znanych metod wyznaczania liczb pierwszych jest sito Eratostenesa. Opiera się ona na spostrzeżeniu, w zasadzie oczywistym, że jak wyrzucimy wszystkie liczby złożone, to zostaną same liczby pierwsze. Jeśli chcemy wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze nieprzekraczające n, wypisujemy na kartce liczby naturalne od 1 do n, wykreślamy 1, bo nie jest pierwsza, zostawiamy 2 i wykreślamy wszystkie jej wielokrotności, potem zostawiamy 3 i wykreślamy wszystkie jej wielokrotności (niektóre, np. 6, już zostały wykreślone) i tak dalej. W kolejnym kroku pozostawiamy pierwszą niewykreśloną liczbę i wykreślamy jej wielokrotności. Liczby, które nie zostaną wykreślone, to wszystkie liczby pierwsze nie większe od n.

W tym artykule zastanowimy się nad tym, jak szybkie jest sito Eratostenesa. Najczęstszą operacją wykonywaną w tym algorytmie jest wykreślanie.

Za pomocą każdej liczby pierwszej wykreślimy, rzecz jasna, co najwyżej $\frac{n}{2}$ liczb złożonych, wobec czego wykonamy łącznie co najwyżej $O(n^2)$ operacji.



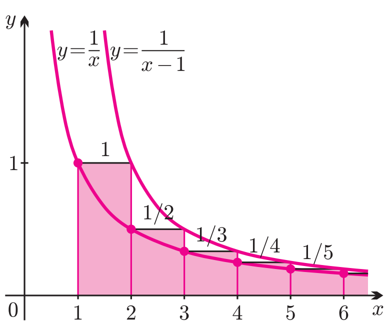
Zauważmy, że możemy zakończyć wykreślanie, gdy rozpatrzymy liczby pierwsze od 2 do $\sqrt{n}$. Faktycznie: każda liczba złożona z zakresu od 4 do n musi mieć jakiś dzielnik pierwszy nie większy niż $\sqrt{n}$. W ten sposób otrzymujemy wariant algorytmu sita działający w czasie $O(n\sqrt{n})$.

Okazuje się, że możemy uzyskać jeszcze lepsze oszacowanie złożoności czasowej. W tym celu w ogóle nie musimy zmieniać zasady działania algorytmu – wystarczy bardziej precyzyjnie oszacować liczbę wykreśleń. Oznaczmy przez $p_1, \ldots, p_k$ kolejne liczby pierwsze nieprzekraczające n. Wówczas łączna liczba wykreśleń to co najwyżej

$$(*)\qquad \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i}.$$

Tę sumę możemy oszacować z góry przez

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$



Czytelnik Wytrawny dostrzeże w powyższej sumie n-tą liczbę harmoniczną $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ i od razu stwierdzi, że przecież $H_n \approx \ln n$. Można to także sprawdzić, jeśli narysuje się n prostokątów o szerokości 1 i wysokościach kolejno 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ itd., a także wykresy funkcji $f_1(x) = \frac{1}{x}$ i $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$ (rysunek). Wówczas suma pól prostokątów – równa co do wartości liczbie H_n – jest nie mniejsza niż pole pod wykresem funkcji $f_1(x)$ dla $1 \leqslant x \leqslant n+1$, a zatem:

$$H_n \geqslant \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(n+1).$$

Podobnie, H_n możemy oszacować z góry przez 1 plus pole pod wykresem $f_2(x)$ dla $2 \leqslant x \leqslant n+1$, czyli:

$$H_n \leqslant 1 + \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x-1} = 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln n + 1.$$

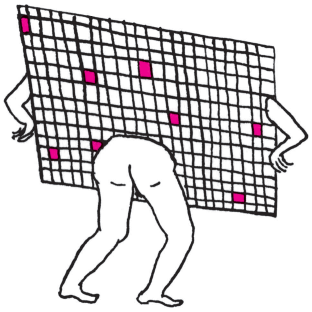
!

Wartość logarytmu nie zmieni się, jeżeli podstawę i liczbę logarytmowaną podniesiemy do tej samej potęgi.

$I = \log_{2^7}(3^7) = \log_{128} 2187$; $\quad J = \log_{5^3}(13^3) = \log_{125} 2197$.

Większą wartość ma logarytm z większą liczbą logarytmowaną i mniejszą podstawą (o ile liczby te są większe od 1).

Zatem $I < J$.



W ten sposób wykazaliśmy, że złożoność sita Eratostenesa to $O(nH_n) = O(n \log n)$. Co ciekawe, można otrzymać jeszcze lepsze oszacowanie, jeśli tylko dokładniej przyjrzeć się sumie $(*)$ i wykorzystać pewien znany fakt z teorii liczb.

Oznaczmy przez $\pi(n)$ liczbę liczb pierwszych nieprzekraczających liczby n. Kluczowy fakt to: $\pi(n)$ asymptotycznie zachowuje się tak, jak $n/\ln n$. Nie będziemy tego faktu dowodzić. Korzystając z niego, wnioskujemy, że i-ta liczba pierwsza, p_i, średnio jest rzędu $i \ln i$. To pozwala nam zapisać sumę $(*)$ w postaci równoważnej asymptotycznie sumy:

$$n \sum_{i=1}^{\pi(n)} \frac{1}{i \ln i} \sim n \sum_{i=1}^{\lfloor n/\ln n \rfloor} \frac{1}{i \ln i}.$$

Podobnie jak poprzednio, n-tą część tej sumy możemy asymptotycznie przybliżać całką:

$$\int_2^{n/\ln n} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x},$$

a tę z kolei oszacować z góry przez całkę z prostszym ograniczeniem górnym:

$$\int_2^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}.$$

Ostatnią z powyższych całek wyznaczamy przez podstawienie $y = \ln x$, $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{x}$:

$$\int_2^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\ln n} \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln y \Big|_{\ln 2}^{\ln n} \leqslant \ln \ln n.$$

W ten sposób otrzymaliśmy asymptotyczne oszacowanie sumy $(*)$ przez funkcję $\ln \ln n$, co pozwala stwierdzić, że złożoność sita Eratostenesa to $O(n \log \log n)$.

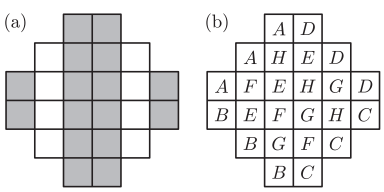
Czytelnik nielubiący manipulować takimi całkami może otrzymać podobnie dobre oszacowania, jeśli tylko spojrzy na algorytm sita z nieco innej strony. Otóż każda liczba złożona między 4 a n zostanie wykreślona tyle razy, ile ma różnych czynników pierwszych w rozkładzie. Dla liczby całkowitej dodatniej k, oznaczmy przez $\omega(k)$ liczbę różnych dzielników pierwszych liczby k.

Łatwo wykazać, że zawsze $\omega(n) \leqslant \log_2 n$. Faktycznie, jeśli $n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_j$, przy czym wszystkie liczby $q_1, \ldots, q_j$ są pierwsze, to $n \geqslant 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^j$, skąd $j \leqslant \log_2 n$, więc tym bardziej $\omega(n) \leqslant \log_2 n$. W ten sposób łatwo uzasadniliśmy, że łączna liczba wykreśleń jest rzędu $O(n \log n)$. Niestety, tą metodą trudniej jest dojść do lepszego z wcześniejszych oszacowań, tj. $O(n \log \log n)$.

Metodę sita możemy jeszcze trochę usprawnić. Zauważmy, że za pomocą danej liczby pierwszej p_i, nie większej od $\sqrt{n}$, wystarczy wykreślać liczby złożone począwszy od p_i^2, gdyż wszystkie wcześniejsze wielokrotności p_i musiały zostać wykreślone wcześniej. Taka poprawka nie zmienia jednak złożoności czasowej algorytmu.

Na koniec warto wspomnieć, że w algorytmie sita Eratostenesa cały zakres liczb od 1 do n możemy podzielić na kawałki długości $\sqrt{n}$ i wykreślać liczby złożone tylko w takich kawałkach. To pozwala nam zredukować rozmiar tablicy używanej do wykreślania do wartości rzędu $O(\sqrt{n})$, co ma niebagatelne znaczenie tak teoretyczne, jak i praktyczne. Więcej na ten temat można znaleźć w artykule Tomasza Idziaszka w *Delcie* 9/2011.

Rozwiązanie zadania M 1347.
Na rysunku (a) pokazano, jak zamalować 16 pól.



Aby wykazać, że więcej niż 16 pól nie można zamalować, rozważmy ułożenie trzech kopii każdej z liter A, B, C, D, E, F, G, H na serwetce, pokazane na rysunku (b). Zgodnie z treścią zadania nie można zamalować trzech pól z tą samą literą, więc można zamalować co najwyżej $2 \cdot 8 = 16$ pól.

Która liczba jest większa?

$$K = \log_2 3 \cdot \log_5 7 \quad \text{czy} \quad L = \log_2 7 \cdot \log_5 3$$