Gdy się nie ma, co się lubi…

Paweł STRZELECKI

Zbiór $Z \subset [a,b]$ jest **miary Lebesgue'a zero**, jeśli dla każdej liczby $\varepsilon > 0$ istnieją przedziały I_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$, takie, że suma ich długości nie przekracza ε, a Z jest zawarty w $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \ldots$. Jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ma jakąś własność poza zbiorem Z miary zero, to mówi się, że f ma tę własność **prawie wszędzie**.

W *Delcie* 10/2009, w artykule *Czy naprawdę prawie robi wielką różnicę*, Paulina Małolepsza i Tomasz Małolepszy piszą o przykładach funkcji ciągłych, które są różniczkowalne prawie wszędzie, ale jednak nie są całkami swoich pochodnych. Innymi słowy, okazuje się, że w twierdzeniu Newtona–Leibniza, orzekającym, że jeśli funkcja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła na $[a,b]$ i ma (powiedzmy ciągłą) pochodną w (a,b), to mamy

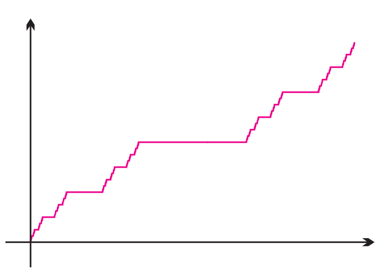
$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt, \tag{1}$$

nie wolno opuścić założenia, iż pochodna istnieje *w każdym* punkcie $t \in (a,b)$. Nawet jeśli zbiór $Z \subset [a,b]$ tych punktów, gdzie f' nie istnieje, jest bardzo mały – ma *miarę Lebesgue'a równą zero*, tzn., intuicyjnie mówiąc, zerową długość – to może się okazać, że funkcja f ciągła na $[a,b]$ i różniczkowalna w $[a,b] \setminus Z$ nie spełnia równości (1). Przykłady takich funkcji można znaleźć we wspomnianym artykule; na marginesie naszkicowane są wykresy dwóch: funkcji Cantora i Minkowskiego. Ta druga jest ciągła i *ściśle* rosnąca na $[0,1]$, lecz jej pochodna nie ma ochoty być (choćby tu i ówdzie) dodatnia, tylko znika prawie wszędzie. Jest *prawie wszędzie* taka, jaka powinna być pochodna funkcji stałej, tylko że funkcja Minkowskiego stała, niestety, nie jest.

Drugi tom prac zebranych Wacława Sierpińskiego jest kopalnią, obfitującą w przykłady funkcji o równie nieintuicyjnych własnościach.

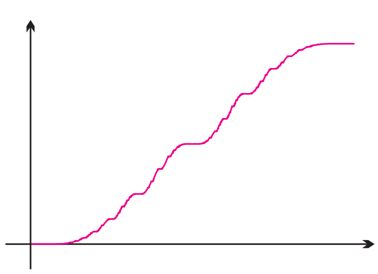
Kogoś, kto na studiach uczył się podstaw teorii miary i całki Lebesgue'a i wysłuchiwał, że zachowanie funkcji na zbiorze miary zero nie wpływa na wartość całki, takie przykłady z początku zwykle dziwią i lekko niepokoją. Nie ma jednak w nich żadnej sprzeczności. Po prostu, jeśli dobra, stara, klasycznie rozumiana pochodna nie *wszędzie* istnieje, to (czasem) nie koduje już informacji o przyrostach funkcji.

Można się z tym pogodzić i np. szukać coraz subtelniejszych, przeczących intuicji przykładów tego, że w twierdzeniu Newtona–Leibniza słówko *prawie* jest zakazane. Najważniejszą rzeczą, którą chciałbym Czytelnikowi powiedzieć, jest jednak to, że kontrprzykłady, choć ważne, są mimo wszystko drugorzędne, o ile nie służą dalszej budowie matematyki, tworzeniu takich dodatków do jej gmachu, które pozwalają – być może za pomocą zupełnie nowych pojęć, narzędzi i środków – robić coś, czego dotąd nie potrafiliśmy, albo wręcz uważaliśmy za niemożliwe. Nie chodzi wszak o to, żeby wszystko było zawsze po staremu.



Funkcja Cantora.

Prawdziwie twórcze pytania, jakie stawiało sobie wielu matematyków między rokiem 1890 a 1940, gdy narodziły się i dojrzały teoria miary z analizą funkcjonalną, brzmią następująco: *Jak należałoby zmodyfikować lub rozszerzyć pojęcie pochodnej, żeby jakiś odpowiednik równości* (1) *był prawdziwy także wtedy, gdy f nie jest różniczkowalna w każdym punkcie? Czy można będzie wtedy posługiwać się innymi narzędziami rachunku całkowego, np. wzorem na całkowanie przez części?*



Funkcja Minkowskiego.

Okazuje się, że można to zrobić na kilka różnych, choć zasadniczo równoważnych sposobów. Zacznijmy od takiego, który dla funkcji jednej zmiennej jest naturalną drogą do uprawomocnienia wzoru Newtona–Leibniza (1) dla odpowiednio zawężonej klasy funkcji ciągłych,

?

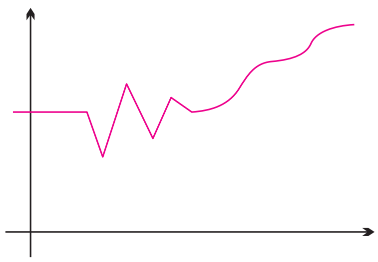
Która liczba jest większa?

$$A = 2^{2^{10}} \quad \text{czy} \quad B = 10^{10^2}$$

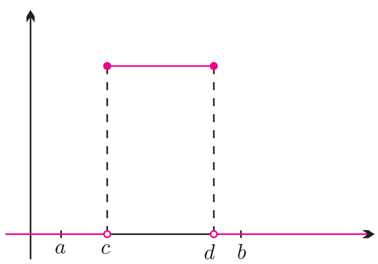
różniczkowalnych prawie wszędzie. Ustalmy przedział $[a, b] \subset \mathbb{R}$ i funkcję całkowalną g, która za chwilę odegra rolę pochodnej innej funkcji. Niech

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in [a, b]; \tag{2}$$

liczbę $f(a)$ można wybrać dowolnie, a prawą stronę wzoru traktujemy jako definicję f. Nietrudno sprawdzić, że tak określona funkcja f jest ciągła. To wynika z równości $|f(x) - f(y)| = |\int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t|$, a o ile całkujemy po dostatecznie krótkim przedziale, to całka z funkcji całkowalnej jest mniejsza niż dowolnie ustalony dodatni margines błędu, z upodobaniem oznaczany literką ε. Subtelniejszą, ale wykonalną rzeczą jest wykazanie, że f ma pochodną f' prawie wszędzie w $[a, b]$ i w dodatku f' jest równa g też prawie wszędzie w $[a, b]$.



Funkcja kawałkami klasy C^1 (zad. 1).



Funkcja charakterystyczna przedziału $[c, d]$ (zad. 2).

Te funkcje ciągłe, które otrzymuje się ze wzoru (2), zmieniając funkcję całkowalną g na wszelkie możliwe sposoby, nazywają się *absolutnie ciągłymi.* To dla nich (i tylko dla nich) wzór Newtona–Leibniza ma sens; można się nie obawiać, czy f' istnieje wszędzie, czy tylko *prawie wszędzie.* Pozostałe funkcje ciągłe określa się mianem *osobliwych.* Słusznie; ich miejsce jest w gabinecie osobliwości.

Równoważna definicja funkcji absolutnie ciągłych, nieco trudniejsza do przełknięcia, ale lepiej poddająca się uogólnieniom na funkcje wielu zmiennych, jest następująca. Przypuśćmy, że f jest funkcją całkowalną na przedziale $[a, b]$. Powiemy, że f ma w $[a, b]$ **słabą pochodną** równą g, jeśli po pierwsze g też jest całkowalna na przedziale $[a, b]$, po drugie zaś wzór

$$\int_a^b f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_a^b g(t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

zachodzi dla **każdej** funkcji $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, która ma ciągłą pochodną i spełnia warunek $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Pouczającą rzeczą jest samodzielne rozwiązanie trzech zadań:

1. Jeśli f jest kawałkami klasy C^1 w $[a, b]$, to ma słabą pochodną, równą klasycznie rozumianej f' (poza skończoną liczbą punktów, gdzie f' może nie istnieć).
2. Jeśli $a < c < d < b$, to funkcja charakterystyczna przedziału $[c, d]$ nie ma słabej pochodnej w $[a, b]$.
3. Funkcja Cantora nie ma słabej pochodnej, choć ma klasycznie rozumianą pochodną prawie wszędzie.

Zauważmy, że słabą pochodną definiujemy nie *punkt po punkcie*, ale za pomocą wszystkich *średnich* $\int g\varphi$. To, jak się wydaje, jest bardziej zbliżone do fizycznego sensu *pomiaru* różnych wielkości.

Cóż właściwie ma oznaczać taka, na pozór zupełnie niesprawdzalna, definicja? Proszę myśleć o tym tak: gdyby f miała ciągłą pochodną $f' = g$, to dla każdej funkcji φ, o której mowa, mielibyśmy $(f\varphi)' = f\varphi' + f'\varphi = f\varphi' + g\varphi$, a ponadto $(f\varphi)(a) = (f\varphi)(b) = 0$, gdyż funkcja φ ma z założenia znikać na końcach rozważanego przedziału. Zatem, na mocy wzoru Newtona–Leibniza, całka z funkcji $(f\varphi)'$ powinna być zerem, a właśnie to jest przecież treścią wzoru (3). Mówiąc nieco inaczej, (3) to wzór na całkowanie przez części, przemyślnie wbudowany w nową definicję pojęcia pochodnej.

Co więcej, wzór (3) może zachodzić tylko dla jednej funkcji g – gdyby zachodził dla g_1 i g_2, to odejmując dwie równości stronami, otrzymalibyśmy $\int_a^b (g_1 - g_2)\varphi\,\mathrm{d}t = 0$ dla każdej φ spełniającej podane wcześniej warunki. Można wykazać – jest to tak zwany lemat du Bois-Reymonda – że wtedy mamy $g_1 = g_2$ prawie wszędzie. Dlatego słaba pochodna jest określona jednoznacznie, a jeśli przypadkiem f jest ciągła i ma ciągłą pochodną określoną klasycznie, to obie pochodne są równe (prawie wszędzie, rzecz jasna).

Przy dodatkowym założeniu, że g_1 i g_2 są ciągłe, dowód jest łatwym zadaniem.

Można wykazać, że funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła, tzn. jest całką g, daną wzorem (2), wtedy i tylko wtedy, gdy f jest całkowalna i ma całkowalną *słabą pochodną.* Obie drogi wyboru rodziny funkcji, dla których (na każdym odcinku) zachodzi wzór Newtona–Leibniza, wiodą zatem do tego samego celu.

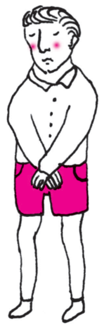
Pojęcie słabej pochodnej jest w analizie znacznie ważniejsze od zwykłej różniczkowalności prawie wszędzie, bo zachowuje ważne twierdzenia!

$$A = 2^{2^{10}} = 2^{1024} > 2^{1000} = 2^{10\cdot 100} = 1024^{100} > 1000^{100} = 10^{300}$$

$$B = 10^{100}$$

Zatem $A > B$.

Już sama nazwa **słabe pochodne** kojarzy się, nomen omen, ze słabością, a więc – być może – z niedoskonałością, czymś wstydliwym, co niektórzy wolą ukryć i schować głęboko.



Zbiór $\{h\colon \Phi(h) \leqslant \mathrm{const}\}$ może być niezwarty w przestrzeni C^k i zwarty w odpowiednio dobranej większej przestrzeni funkcyjnej, z inną metryką, która sprawia, że zbiorów zwartych jest więcej.

Po cóż komu takie pojęcia? Dlaczego studiować paskudne funkcje wielu zmiennych, których dziwacznie określone *słabe pochodne* są zaledwie funkcjami całkowalnymi, więc mogą np. okazać się nieciągłe w bardzo wielu punktach? Odpowiedzi, że przestrzenie takich funkcji – tzw. *przestrzenie Sobolewa* – są same w sobie ciekawymi obiektami badań, nie kupi wszak ani fizyk, ani niejeden matematyk. Prawdziwy sens i powód rozważania takich funkcji przynosi jednak teoria równań różniczkowych i jej pogranicze z fizyką oraz geometrią.

Dlaczego? Otóż, przestrzenie Sobolewa są dużo obszerniejsze od przestrzeni C^k funkcji różniczkowalnych k-krotnie w sposób ciągły. Pierwszym odruchem kogoś, kto próbuje dowodzić istnienia rozwiązań równań różniczkowych, jest ograniczanie się właśnie do swojskich i znanych funkcji klasy C^k. Postępując tak, wiążemy sobie ręce: częścią dowodu istnienia *musi* być dowód ciągłości pochodnych. Interpretując równanie w ogólniejszym języku przestrzeni Sobolewa, otrzymujemy – po pierwsze – więcej kandydatur na rozwiązania, po drugie zaś oddzielamy samą kwestię istnienia rozwiązania od sprawdzania jego dodatkowych własności. Po trzecie, cała analiza funkcjonalna staje się skrzynią z narzędziami, których w tym obszerniejszym świecie można używać. Po czwarte, rozmaite zbiory funkcji, które w przestrzeniach C^k są niezwarte, rozległe tak, że aż wiatr w nich hula, potrafią stawać się małe i przytulne właśnie w przestrzeniach Sobolewa. Nabierają wtedy sensu proste argumenty w rodzaju *każda funkcja ciągła Φ na zbiorze zwartym osiąga w pewnym punkcie swój kres dolny*, często nieprzydatne, gdy Φ jest funkcjonałem na przestrzeni C^k, wyposażonej w nazbyt wymagające pojęcie zbieżności. Po piąte wreszcie, bywa i tak, że nieliniowa natura problemu sama wymusza istnienie osobliwości rozwiązań. Defekty ciekłych kryształów, samoprzecięcia błon mydlanych... Wtedy przestrzenie, dopuszczające nieciągłe rozwiązania, są jak znalazł.

Do najważniejszych sukcesów nowych metod, wkraczających w teorię równań cząstkowych i rachunek wariacyjny, należało rozwiązanie w początku lat 30. XX wieku zagadnienia Plateau, czyli dowód istnienia powierzchni o zadanym z góry brzegu i minimalnym polu. W 1969 roku Hildebrandt udowodnił, że każda powierzchnia minimalna jest *do brzegu włącznie* tak gładka, jak gładki jest ów z góry zadany brzeg.

A lekturę *Fausta* też gorąco polecam.

Pomysł, żeby znane pojęcie pochodnej zastąpić nowym, jest iście szatański. Stefan Hildebrandt porównywał go do mefistofelesowskiego wprowadzania papierowych pieniędzy zamiast złota. Papierowy oraz plastikowy pieniądz, którego nośnik wart jest niewiele, ma jednak zalety; wygodniej go nosić i przesyłać niż wory monet. Wygodniej dowodzić, że się go ma. Kto zechce, może w bankomacie wymienić plastik na papier; kto się uprze, dokona wymiany na złoto. Współczesna teoria równań różniczkowych zna odpowiednik tego postępowania: używając misternie splecionej sieci różnych nierówności, dowodzi się, że *słabe rozwiązania* wielu równań są w istocie pięknymi, klasycznymi rozwiązaniami klasy C^k.

Wspomniana armia osób, korzystających rozmaicie z pojęcia słabej pochodnej, ma sporą grupkę warszawskich przedstawicieli, począwszy od np. Bogdana Bojarskiego, Aleksandra Pełczyńskiego czy Michała Wojciechowskiego w IMPAN, po Piotra Muchę, Piotra Rybkę, Witolda Sadowskiego czy Dariusza Wrzoska w Instytucie Matematyki Stosowanej i Mechaniki UW.

Dawne korzenie na UW mają także niektórzy jej przedstawiciele, pracujący dziś w USA, np. Piotr Hajłasz i Tadeusz Iwaniec.

Bez pojęcia słabej pochodnej i masy jego konsekwencji cała armia moich starszych i młodszych kolegów po fachu byłaby częściowo bezrobotna. Nie byłoby też sporej części analizy funkcjonalnej i harmonicznej ani współczesnego matematycznego opisu chemotaksji, wirów w nadprzewodnikach, przejść fazowych, ruchu cieczy lepkich, dyfuzji w ośrodkach porowatych itp.

Warto więc w funkcjach Cantora i Minkowskiego, oraz im podobnych, widzieć nie tyle osobliwe kontrprzykłady, ale przede wszystkim drogowskazy, które pewnie były niewyraźne, ale, jak ze stuletniej perspektywy jasno widać, matematyków klasy Poincarégo, Hilberta, Weyla czy Sobolewa kierowały we właściwą stronę.

?

Która liczba jest większa?

$$C = 2^{2^{2^{1001}}} \quad \text{czy} \quad D = 1000^{2^{2^{1000}}}$$