Do nieskończoności jeszcze sporo brakuje

$a+4r$	$a+9r$	$a+2r$
$a+3r$	$a+5r$	$a+7r$
$a+8r$	$a+r$	$a+6r$

Zamieszczony w poprzednim numerze, jako zapowiedź tego numeru, widoczny obok kwadrat magiczny jest dla $a=-11$ (lub $a=199$) i $r=210$ złożony z samych liczb pierwszych.

Można na to spojrzeć inaczej: istnieje ciąg arytmetyczny o długości co najmniej 9 złożony z liczb pierwszych (a nawet dwa takie ciągi).

Powstaje pytanie, czy istnieją dłuższe ciągi arytmetyczne złożone z samych liczb pierwszych.

Dawno, dawno temu – bo prawie przed ćwierćtysiącleciem – Lagrange i Waring doszli do wniosku, że powinny istnieć dowolnie długie takie ciągi złożone z liczb pierwszych. Do wniosku doszli, ale udowodnić tego nie umieli, podobnie jak wielu ich następców.

Oczywiście, nieskończenie długi – niestały – ciąg arytmetyczny, złożony z liczb pierwszych, nie istnieje. Dowód powinien Ci, Czytelniku, przyjść do głowy. Ale jeśli tego zaniedba, możesz poszukać go w numerze.

Z istnienia dowolnie długiego ciągu arytmetycznego, złożonego z samych liczb pierwszych, wynika, że dla dowolnego m istnieje nieskończenie wiele takich ciągów o długości m – prawda?

Odrębną konkurencją jest poszukiwanie jak najdłuższego ciągu arytmetycznego złożonego z kolejnych liczb pierwszych (czyli takiego, że dla dowolnych dwóch jego kolejnych wyrazów nie ma liczby pierwszej leżącej między nimi) – tu aktualnie (chyba) rekordowa długość to 10. Poszczególne wyrazy oddziela zaledwie 210 (a może to ten, od którego zaczęliśmy?).

Dowód udało się uzyskać dopiero 8 lat temu – dokonali tego Ben Green i Terence Tao. Ale już poprzednio trwały zawody w znajdowaniu jak najdłuższego takiego ciągu. W 1979 roku (z którego pochodzą oba teksty Starej Delty, przytoczone w tym numerze) rekordowy ciąg arytmetyczny liczb pierwszych miał 17 wyrazów (i liczył sobie 2 lata):

$$3430751869 + 87297210 \cdot k, \qquad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \ldots, 16.$$

Autor zagadek matematycznych znajdujących się na dole pierwszych 20 stron tego numeru *Delty*, Jarosław Wróblewski, ustanowił w tej kategorii rekord świata w styczniu 2007 roku, budując ciąg

$$468395662504823 + 205619 \cdot 23\# \cdot k, \qquad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \ldots, 23;$$

symbol $n\#$ oznacza iloczyn liczb pierwszych nieprzekraczających n.

Rok później, w maju 2008 wraz z Raananem Chermonim poprawił ten wynik o 1, budując ciąg

$$6171054912832631 + 366384 \cdot 23\# \cdot k, \qquad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \ldots, 24.$$

Pół roku później powstał międzynarodowy projekt *PrimeGrid* zbiorowego poszukiwania takich ciągów (`http://www.primegrid.com/`) i (chyba) do niego należy obecnie rekord – uzyskany w kwietniu 2010 ciąg

$$43142746595714191 + 23681770 \cdot 23\# \cdot k, \qquad \text{gdzie } k = 0, 1, 2, \ldots, 25.$$

M. K.

Odpowiedź na pytania o trzydziestkę

Sprawdźmy, dla których liczb wszystkie mniejsze od nich i względnie pierwsze z nimi – poza jedynką – są liczbami pierwszymi.

Dla 2 takich liczb nie ma (formaliści powiedzą więc, że jest dobrze). Dla 3 liczbą taką jest tylko 2, a ta jest pierwsza. Dla 4 to 3 – dobrze. Dla 5 jest już źle: 4 jest względnie pierwsze z 5, a pierwsze nie jest. Morał: 4 będzie psuło wszystkie większe liczby nieparzyste, stąd warto zająć się już tylko parzystymi. Dla 6 mamy 5 – dobrze, dla 8 jest 3, 5, 7 – dobrze. Ale 10 już odpada ze względu na 9 – stąd dalej warto zajmować się tylko liczbami podzielnymi przez 6. Dla 12 mamy 5, 7, 11 – dobrze, dla 18 jest 5, 7, 11, 13, 17 – dobrze i dla 24 też jest dobrze (5, 7, 11, 13, 17, 19, 23). Teraz tytułowa 30. Dla niej mamy 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Kolejna liczba podzielna przez 6 jest zła: 25 jest mniejsze od 36 – konsekwentnie powinniśmy powiedzieć, że teraz będziemy rozważali tylko liczby podzielne przez 30. Tylko że to nie pomaga, bo 49 jest mniejsze od 60. Czytelnik zechce przedłużyć to rozumowanie na „pozostałe” liczby naturalne.

!

$$\log_2 G = (\log_2 \log_2 2011) \cdot (\log_2 2011)$$

$$\log_2 H = (\log_2 2011) \cdot (\log_2 \log_2 2011)$$

Zatem $G = H$.