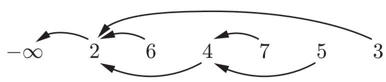
Prostokąt arytmetyczny

Jakub RADOSZEWSKI

W tym artykule omówimy zadanie *Prostokąt arytmetyczny* z Akademickich Mistrzostw Polski w Programowaniu Zespołowym 2011. Jednak zanim to zrobimy, zastanowimy się nad dwoma pozornie niezwiązanymi problemami.

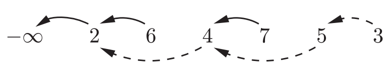
Problem 1. Dany jest n-elementowy ciąg liczb całkowitych $a_1, \ldots, a_n$. Chcielibyśmy dla każdego elementu ciągu wyznaczyć najbliższy mniejszy od niego element położony na lewo od niego. Formalnie, dla każdego i szukamy największego takiego j, $j < i$, że $a_j < a_i$. Aby ta wartość była zawsze zdefiniowana, dokładamy sztuczny element $a_0 = -\infty$ (patrz rys. 1).



Rys. 1

Najprostszy algorytm rozwiązujący Problem 1 działa w czasie $O(n^2)$. Używając sprytnych struktur danych (zrównoważone drzewa binarne), można otrzymać rozwiązanie działające w czasie $O(n \log n)$. Podany problem można jednak rozwiązać prosto i liniowo, jeśli tylko pójdzie się za strzałkami.

Idea takiego rozwiązania jest jasna: będziemy przypisywać strzałki kolejnym elementom, od lewej do prawej. Dla danego i zaczynamy od sprawdzenia, czy $a_{i-1} < a_i$. Jeśli tak, to wiemy, że strzałka z a_i prowadzi do a_{i-1}. A jeśli nie, to idziemy do pierwszego elementu mniejszego niż a_{i-1}, czyli dokładnie wzdłuż strzałki z a_{i-1}. Kontynuujemy to postępowanie aż do momentu, gdy znajdziemy element mniejszy niż a_i. Przykładowo, rysunek 2 ilustruje wyznaczanie strzałki wychodzącej z trójki.



Rys. 2

Aby uzasadnić, że ten algorytm jest liniowy, wystarczy pokazać, że wzdłuż każdej strzałki przejdziemy co najwyżej raz. Faktycznie, jeśli przy wyznaczaniu strzałki dla a_i przechodzimy wzdłuż strzałki wychodzącej z pewnego a_j $(j < i)$, to wiemy, że $a_j \geqslant a_i$. To oznacza, że każda strzałka wychodząca z elementów $a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots$ prowadzi albo do a_i lub elementu położonego na prawo od a_i, albo do jakiegoś elementu mniejszego niż a_i, a zatem położonego na lewo od a_j. Strzałkę wychodzącą z a_j wykorzystamy zatem dokładnie raz, co chcieliśmy wykazać.

Problem 2. Mamy daną tablicę rozmiaru $n \times n$ wypełnioną zerami i jedynkami. Należy znaleźć prostokątny fragment tej tablicy wypełniony samymi jedynkami o jak największej powierzchni (patrz rys. 3). Ten problem pojawił się na IX Olimpiadzie Informatycznej jako zadanie *Działka*.

1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	0
0	1	1	0	1

Rys. 3

Wszystkich prostokątów w takiej tablicy jest rzędu n^4, więc problem trzeba rozwiązywać jakoś sprytniej. Znana jest cała gama rozwiązań o złożoności czasowej $O(n^4)$, $O(n^3)$, a nawet $O(n^2)$. Pokażemy tu dosyć proste rozwiązanie o optymalnej złożoności $O(n^2)$.

Zacznijmy od wyznaczenia dla każdego pola (i, j) tablicy liczby kolejnych pól wypełnionych jedynkami położonych w dół od tego pola, wliczając samo pole (i, j). Oznaczmy tę wartość przez $D[i, j]$. Takie wartości łatwo wyznaczamy w czasie $O(n^2)$, idąc od dołu do góry tablicy (rys. 4). Zauważmy, że $D[i, j]$ jest niezerowe tylko wtedy, gdy oryginalna tablica w polu (i, j) miała jedynkę.

1	0	0	4	2
0	4	4	3	1
2	3	3	2	0
1	2	2	1	0
0	1	1	0	1

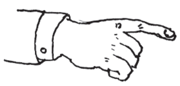
Rys. 4

Teraz przychodzi kluczowe spostrzeżenie. Otóż poszukiwany prostokąt możemy skonstruować tak: bierzemy jakieś pole (i, j) i wyznaczamy prostokąt zawierający to pole w górnym wierszu, o wysokości $D[i, j]$ i sięgający w prawo i w lewo tak daleko, jak tylko się da. Faktycznie, wynikowy prostokąt nie może być rozszerzony w dół (ani w żadną inną stronę), więc musi być opisanej postaci dla pewnego pola (i, j). Przykładowo, na rysunkach 3 i 4 pole (i, j) wynikowego prostokąta (kwadratu) o powierzchni 9 to jego prawy górny róg.

Dla każdego pola (i, j) o niezerowym $D[i, j]$ szukamy zatem najbliższych pól w tym samym wierszu, dla których wartości D są mniejsze niż $D[i, j]$, czyli takich indeksów $j' < j < j''$, że $D[i, j'], D[i, j''] < D[i, j]$, j' jest maksymalne, a j'' – minimalne. Wówczas wynikiem jest maksimum z iloczynów postaci $(j'' - j' - 1) \cdot D[i, j]$ dla wszystkich pól (i, j). Zauważmy jednak, że jest to dokładnie zastosowanie Problemu 1 do i-tego wiersza tablicy D, tyle że raz od lewej do prawej (wyznaczanie j'), a raz od prawej do lewej (wyznaczanie j''). Wystarczy otoczyć tablicę D obwódką z polami zawierającymi $-\infty$ i możemy już zastosować poprzedni algorytm, wiersz po wierszu. Dostajemy żądany czas $O(n^2)$.

1	3	7	11	15
2	4	6	8	10
5	5	5	5	5
8	6	4	2	0
6	3	0	4	8

Rys. 5



Problem 3. Przyszła wreszcie pora, aby sformułować wspomniane na wstępie zadanie o prostokącie arytmetycznym. Znów mamy daną tablicę rozmiaru $n \times n$, tym razem mogą się w niej znajdować dowolne nieujemne liczby całkowite. Szukamy w niej prostokąta arytmetycznego o maksymalnej powierzchni, przy czym prostokąt arytmetyczny to prostokąt, w którym liczby w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie tworzą ciąg arytmetyczny (patrz rys. 5).

Na początek zajmijmy się prostokątami o wysokości 1. Widzimy, że każdy wiersz tablicy możemy podzielić na maksymalne ciągi arytmetyczne, z których każdy ma długość co najmniej dwa i każde dwa kolejne ciągi mają dokładnie jeden element wspólny. Przykładowo, dolny wiersz tablicy z rysunku 5 dzielimy na ciągi $(6, 3, 0)$ i $(0, 4, 8)$, a górny na ciągi $(1, 3)$ i $(3, 7, 11, 15)$. Korzystając z takiego przedstawienia, w czasie $O(n^2)$ łatwo znajdziemy najdłuższy prostokąt arytmetyczny o wysokości 1. Podobnie rozpatrujemy prostokąty o długości 1, wysokości 2 (jak?) i długości 2.

1	3	7	11	15
2	4	6	8	10
5	5	5	5	5
8	6	4	2	0
6	3	0	4	8

Rys. 6

Odtąd interesować nas będą tylko prostokąty, których każdy bok ma długość co najmniej 3. Znajdowanie takich prostokątów sprowadzimy do zadania *Działka*.

Zaznaczmy mianowicie kółkiem każdy taki element tablicy, że kwadrat o boku 3 zawierający ten element w środku jest prostokątem arytmetycznym (rys. 6). Okazuje się, że prostokąt o obu wymiarach nie mniejszych niż 3 jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zawarte w nim elementy tablicy (poza, ewentualnie, jego wewnętrzną obwódką o szerokości 1) są zaznaczone kółkami. Rzeczywiście, jeśli prostokąt jest arytmetyczny, to każdy jego podprostokąt jest arytmetyczny, więc w szczególności wszystkie kwadraty o boku 3, zawarte w tym prostokącie, są arytmetyczne. A w drugą stronę, jeśli mamy dwa sąsiednie elementy tablicy zaznaczone kółkami, to ciągi arytmetyczne w otaczających je kwadratach 3×3 sklejają się w dłuższe ciągi arytmetyczne dokładnie tak, jak trzeba.

Podsumowując: wąskie prostokąty arytmetyczne rozpatrzyliśmy osobno, a problem szukania odpowiednio grubego prostokąta arytmetycznego o maksymalnej powierzchni sprowadziliśmy do poszukiwania maksymalnych prostokątów złożonych wyłącznie z wyróżnionych pól, czyli dokładnie do Problemu 2. Całe rozwiązanie działa w optymalnym czasie $O(n^2)$ i jest, w sumie, całkiem sprytne.

Na koniec ciekawa własność prostokątów arytmetycznych, która może zainteresować także nieinformatyków: prostokąt o wysokości co najmniej 2 jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy liczby w każdej jego kolumnie oraz w dowolnych *dwóch* jego wierszach tworzą ciągi arytmetyczne. Dodajmy, że ta własność nie zachodzi, jeśli wymagamy tylko, aby jeden wiersz prostokąta stanowił ciąg arytmetyczny.

Rozwiązanie zadania F 807.
Na mocy symetrii układu obraz źródła będzie położony także w odległości b od kulki, ale po jej drugiej stronie.