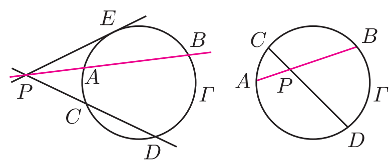
Osie potęgowe

Joanna JASZUŃSKA

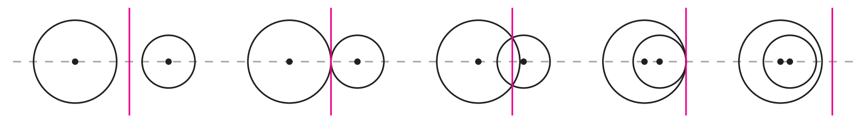
Prosta przechodząca przez punkt P przecina okrąg Γ w punktach A i B. Dla P na zewnątrz Γ



potęga punktu P względem okręgu Γ to $\mathrm{Pot}(P,\Gamma) = PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$. Gdy P znajduje się wewnątrz Γ, to $\mathrm{Pot}(P,\Gamma) = -PA \cdot PB = -PC \cdot PD$. Gdy P leży na Γ, to $\mathrm{Pot}(P,\Gamma) = 0$.

Pojęcie potęgi punktu z poprzedniego *deltoidu* (przypomniane na marginesie) prowadzi do poniższych trudniejszych twierdzeń o ciekawych zastosowaniach.

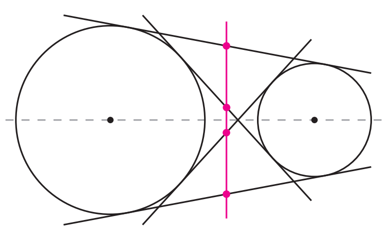
Twierdzenie 1. *Dla niewspółśrodkowych okręgów Γ_1 i Γ_2 zbiór punktów P, takich że $\mathrm{Pot}(P,\Gamma_1) = \mathrm{Pot}(P,\Gamma_2)$, jest prostą, zwaną osią potęgową Γ_1 i Γ_2* (rys. 1).



Rys. 1. Przykłady osi potęgowych. Oś potęgowa jest prostopadła do prostej łączącej środki.

1. Dane są dwa okręgi rozłączne zewnętrznie. Dla każdej z ich wspólnych stycznych rozważmy środek odcinka pomiędzy punktami styczności (rys. 2). Wykaż, że punkty te są współliniowe.

2. Okrąg o środku O, wpisany w czworokąt $ABCD$, jest styczny do boków AB, BC, CD, DA odpowiednio w punktach K, L, M, N. Proste KL i MN przecinają się w punkcie P. Wykaż, że proste OP i BD są prostopadłe.



Rys. 2

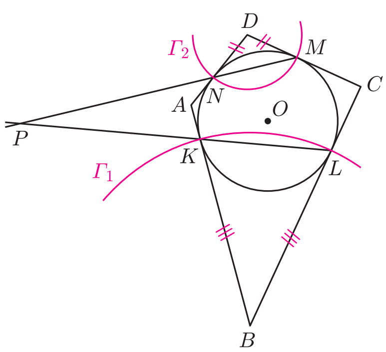
Twierdzenie 2. *Jeśli środki okręgów $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ są parami różne, to osie potęgowe par okręgów Γ_1 i Γ_2, Γ_2 i Γ_3 oraz Γ_1 i Γ_3 są równoległe (gdy środki tych okręgów są współliniowe) lub przecinają się w jednym punkcie (w przeciwnym przypadku).*

Dowód. Jeśli środki okręgów leżą na jednej prostej, to osie potęgowe są prostopadłe do niej. W przeciwnym przypadku żadne dwie osie nie są równoległe; niech P będzie punktem przecięcia osi Γ_1 i Γ_2 z osią Γ_2 i Γ_3. Wtedy $\mathrm{Pot}(P,\Gamma_1) = \mathrm{Pot}(P,\Gamma_2) = \mathrm{Pot}(P,\Gamma_3)$, więc P leży też na osi potęgowej okręgów Γ_1 i Γ_3. □

3. Dane są trzy okręgi o niewspółliniowych środkach; każda para okręgów się przecina. Wykaż, że proste zawierające ich wspólne cięciwy przecinają się w jednym punkcie.

4. Sześciokąt $ABCDEF$ jest wypukły oraz $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FA$. Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB, poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A, przecinają się w jednym punkcie.

5. Wewnątrz wielokąta wypukłego leży skończenie wiele parami rozłącznych okręgów. Wykaż, że można ten wielokąt podzielić na wielokąty wypukłe, z których każdy zawiera dokładnie jeden okrąg.



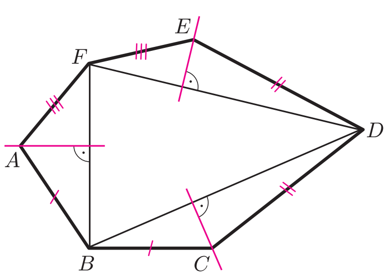
Rys. 3

Rozwiązania

R1. Środek P odcinka pomiędzy punktami styczności E i F ma jednakową potęgę $PE^2 = PF^2$ względem każdego z okręgów, więc leży na ich osi potęgowej. □

R2. Niech $\Gamma_1 = \mathcal{O}(B, BK)$ oraz $\Gamma_2 = \mathcal{O}(D, DM)$ (rys. 3). Prosta OK jest styczna do Γ_1, bo $OK \perp BK$. Stąd $\mathrm{Pot}(O,\Gamma_1) = OK^2 = OM^2 = \mathrm{Pot}(O,\Gamma_2)$, więc O leży na osi potęgowej Γ_1 i Γ_2. Ponadto $\mathrm{Pot}(P,\Gamma_1) = PK \cdot PL = \mathrm{Pot}(P, \mathcal{O}(O, OK)) = PN \cdot PM = \mathrm{Pot}(P,\Gamma_2)$, więc P także leży na osi potęgowej Γ_1 i Γ_2. Oś potęgowa OP okręgów Γ_1 i Γ_2 jest prostopadła do prostej BD łączącej ich środki. □

R3. Proste te są osiami potęgowymi, więc teza wynika z twierdzenia 2. □



Rys. 4

R4. Niech $\Gamma_1 = \mathcal{O}(B, BC)$, $\Gamma_2 = \mathcal{O}(D, DE)$ oraz $\Gamma_3 = \mathcal{O}(F, FA)$ (rys. 4). Punkt C należy do Γ_1 i Γ_2, więc osią potęgową tych okręgów jest rozważana w zadaniu prosta przechodząca przez C i prostopadła do prostej BD łączącej ich środki. Pozostałe rozważane proste są osiami potęgowymi okręgów Γ_2 i Γ_3 oraz Γ_3 i Γ_1. Środki B, D, F okręgów nie są współliniowe, więc osie potęgowe przecinają się w jednym punkcie. □

Wskazówka 5. Do części W_Γ, zawierającej okrąg Γ, niech należą punkty, których potęga względem Γ jest mniejsza niż względem innych okręgów. Granice między częściami wyznaczają wtedy osie potęgowe (dlaczego?)...

Zadania domowe

6. Różne okręgi Γ_1, Γ_2 są współśrodkowe. Wykaż, że nie istnieje taki punkt P, że $\mathrm{Pot}(P,\Gamma_1) = \mathrm{Pot}(P,\Gamma_2)$.

7. Dany jest okrąg Γ oraz punkty A, B leżące w nierównych odległościach od środka tego okręgu. Udowodnij, że wspólne cięciwy okręgu Γ z okręgami przechodzącymi przez punkty A i B leżą na prostych mających jeden punkt wspólny.

Zadanie 4 pochodzi z XLVI Olimpiady Matematycznej, a zadanie 7 – z II OM. Dowód twierdzenia 1 można znaleźć np. w *Delcie* 8/2009 (zad. M 1251).