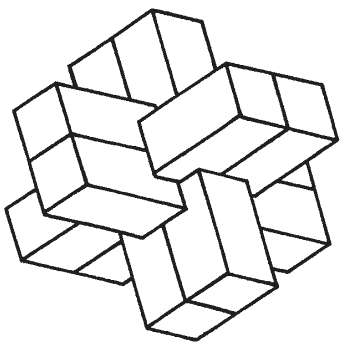
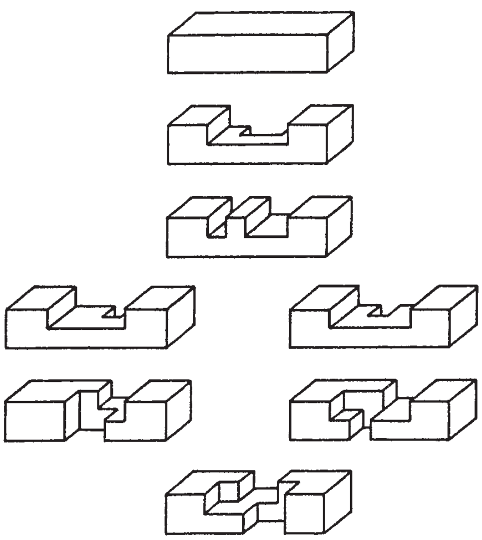
Krzyżak litewski

Wbrew oczywistemu skojarzeniu nie chodzi tu o Konrada Wallenroda, lecz o układankę, jaką przed wiekami wymyślili litewscy drwale. Składa się ona z sześciu patyczków jednakowej długości i mających jednakowe kwadratowe przekroje. Przynajmniej przy obu końcach. Bo w środkowej partii w pięciu z nich czegoś brakuje. A braki dobrane są w ten sposób, że patyczki te dadzą się złożyć właśnie w trójwymiarowy krzyżak (w filmach wojennych można coś o podobnym kształcie, ale z betonu lub stali, spotkać jako zapory przeciwczołgowe). I to złożyć tak zmyślnie, że wewnątrz nie będzie pustego miejsca.



A oto składające się na niego patyczki.



Użycie słowa „składające się” jest zdecydowanie przesadnym eufemizmem – patyczki nie tylko nie składają się, ale wręcz wydają się złośliwie uniemożliwiać złożenie ich w krzyżak próbującemu wykonać to delikwentowi. Polecam takie próby – jeśli za pierwszym razem uda się tego dokonać podczas godziny lekcyjnej (co nie znaczy, abym sugerował składanie krzyżaka na lekcjach), można być z siebie bardzo dumnym.

Oczywiście, aby krzyżak składać, trzeba mieć odpowiednio wycięte patyczki. W posiadaniu redakcji jest taki zestaw patyczków i to oryginalny, bo rzeczywiście wycięty kozikiem przez litewskiego drwala. Mniej więcej trzydzieści lat temu w handlu ukazały się takie plastikowe patyczki, z których można było złożyć taki sam krzyżak. Ale, o dziwo, patyczki nie były takie same – dwie części różniły się od odpowiednich oryginalnych (i narysowanych obok) patyczków. Wynika z tego, że Czytelnik Pracowity, wycinając sobie patyczki na litewski krzyżak, ma pewną swobodę w zaprojektowaniu jego części (w tym kontekście zaskakujący jest fakt, że oryginalne litewskie krzyżaki wszystkie mają jednakowe części). Nie wiemy, jak wielka jest taka swoboda, czyli ile jest istotnie różnych zestawów patyczków na litewski krzyżak. Zachęcamy do prób – poprawne, a różne od zamieszczonego tutaj, zestawy opublikujemy. Podobnie opublikujemy pracę teoretyczną dowodzącą, że możliwych konstrukcji jest tyle a tyle. Jako warunek dla konstruktorów stawiamy to, że – przyjmując wymiary przekroju patyczka jako $a \times a$ – odstępy cięć muszą być wielokrotnościami $a/2$.

Szczególnie istotną sprawą jest także to, by rzeczywiście wewnątrz złożonego krzyżaka nie było luk. Sprawdzać to można mierząc i obliczając, ile drewna w patyczkach brakuje. Z naszych obliczeń wynika, że powinno brakować go $5a^3$. Jeśli wynik ten jest błędny, będziemy wdzięczni za sprostowanie.

I jeszcze uwaga techniczna. Czytelnik niebędący drwalem może być przy struganiu patyczków wystawiony na niebezpieczeństwo pokaleczenia się nożem. Dlatego sugerujemy, aby dobrać do pracy drewno możliwie miękkie i o równoległych słojach. A, oczywiście, ideałem byłoby strugać patyczki z balsy. Można takowe nabyć w sklepach dla modelarzy.

M. K.

O niespodziewanej tożsamości algebraicznej

Załóżmy, że suma kwadratów trzech liczb naturalnych jest podwojonym kwadratem pewnej liczby naturalnej. Czy możliwe jest, żeby wówczas suma czwartych potęg tych trzech liczb była podwojoną czwartą potęgą tej samej liczby?

Okazuje się, że może tak być. Powiemy, jak skonstruować nieskończenie wiele takich trójek w szczególnym przypadku, gdy jedna z tych trzech liczb jest sumą dwóch pozostałych.

Zauważmy najpierw, że

$$x^2 + y^2 + (x+y)^2 = 2(x^2 + xy + y^2),$$
$$x^4 + y^4 + (x+y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2.$$

W szczególności, gdy weźmiemy $x = a^2 - b^2$ oraz $y = 2ab + b^2$, a zatem $x + y = a^2 + 2ab$, otrzymujemy właśnie

$$(a^2 - b^2)^2 + (2ab + b^2)^2 + (a^2 + 2ab)^2 = 2(a^2 + ab + b^2)^2,$$
$$(a^2 - b^2)^4 + (2ab + b^2)^4 + (a^2 + 2ab)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^4.$$

Na przykład dla $a = 3$ i $b = 1$ mamy

$$8^2 + 7^2 + 15^2 = 338 = 2 \cdot 13^2,$$
$$8^4 + 7^4 + 15^4 = 57122 = 2 \cdot 13^4.$$

Czy badana zależność jest spełniona tylko wtedy, gdy jedna z trzech liczb jest sumą dwóch pozostałych? Czy skonstruowaliśmy wszystkie trójki liczb naturalnych spełniające tę zależność? Pozostawiam to do przemyślenia Czytelnikom.

Aleksander GÓRSKI