Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2012

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 637, 638

Redaguje Marcin E. KUCZMA

637. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 3$, dla których zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ daje się przedstawić jako suma trzech rozłącznych zbiorów o równych sumach elementów.

638. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c \geqslant abc$. Udowodnić, że co najwyżej jedna z liczb

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}, \qquad \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{a}, \qquad \frac{1}{3c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$$

jest mniejsza od 1.

Zadanie 638 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2011

Przypominamy treść zadań:

629. Niech n będzie liczbą naturalną większą od 2. Dowieść, że ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ można usunąć dwie liczby tak, by suma liczb, które pozostały, była kwadratem liczby naturalnej.

630. W trójkącie ostrokątnym o bokach długości a, b, c środkowa poprowadzona do boku c ma długość d. Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej $p < 2$ zachodzi nierówność

$$a^p + b^p > \left(d + \frac{c}{2}\right)^p + \left(d - \frac{c}{2}\right)^p.$$

629. Suma wszystkich liczb w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$ wynosi $S = n(n+1)/2$. Suma dwóch liczb z tego zbioru może być dowolną liczbą naturalną od 3 do $2n - 1$. Usuwamy dwie – suma liczb, które pozostały, może być dowolną liczbą naturalną od $S - 2n + 1$ do $S - 3$. Wystarczy wykazać, że w przedziale $\langle S - 2n + 1; S - 3\rangle$ znajduje się jakiś kwadrat liczby naturalnej.

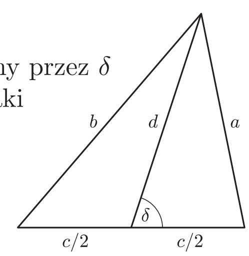
Niech m będzie największą liczbą naturalną, której kwadrat nie przekracza $S - 3$. Wówczas $(m+1)^2 > S - 3$, skąd $m^2 + 2m \geqslant S - 3$, czyli $m^2 \geqslant S - 3 - 2m$. Wystarczy wykazać, że prawa strona ostatniej nierówności jest nie mniejsza niż $S - 2n + 1$; czyli że zachodzi nierówność $m \leqslant n - 2$.

Dla $n = 3, 4, 5, 6$ różnica $S - 3$ wynosi kolejno $3, 7, 12, 18$, co daje wartości $m = 1, 2, 3, 4$; mamy równość $m = n - 2$.

Dla $n \geqslant 7$ szacujemy kwadrat liczby m:

$$m^2 \leqslant S - 3 = \frac{n^2 + n}{2} - 3 = \\ = (n-2)^2 - \frac{(n-2)(n-7)}{2} \leqslant (n-2)^2$$

i dostajemy nierówność $m \leqslant n - 2$, którą chcieliśmy wykazać.



630. Przyjmijmy, że $a \leqslant b$ i oznaczmy przez δ miarę kąta ostrego (lub prostego), jaki zadana środkowa tworzy z prostą, zawierającą bok c. Jest to kąt wewnętrzny w trójkącie o bokach długości $a, c/2, d$, przeciwległy bokowi a. Ze wzoru kosinusów:

$$a^2 = d^2 + \frac{c^2}{4} - cd\cos\delta, \qquad b^2 = d^2 + \frac{c^2}{4} + cd\cos\delta.$$

Przepiszmy te związki w postaci

$$a^2 - \left(d - \frac{c}{2}\right)^2 = cd(1 - \cos\delta) = \left(d + \frac{c}{2}\right)^2 - b^2.$$

Wiadomo, że jeśli F jest funkcją ściśle wklęsłą (w pewnym przedziale) i jeśli k jest stałą dodatnią, to funkcja $G(x) = F(x+k) - F(x)$ jest ściśle malejąca. Zastosujmy tę własność do funkcji $F(x) = x^{p/2}$ (ściśle wklęsłej w przedziale $(0; \infty)$, skoro $0 < p < 2$) oraz do stałej dodatniej $k = cd(1 - \cos\delta)$. Tworzymy funkcję malejącą $G(x) = (x+k)^{p/2} - x^{p/2}$.

Zauważmy, że $(d - c/2)^2 < b^2$ (równoważnie: $|d - c/2| < b$; jest to nierówność dla boków jednego z trójkątów, na które środkowa dzieli trójkąt wyjściowy). Zatem

$$G\left(\left(d - \frac{c}{2}\right)^2\right) > G(b^2),$$

czyli

$$\left(\left(d - \frac{c}{2}\right)^2 + k\right)^{p/2} - \left(d - \frac{c}{2}\right)^p > (b^2 + k)^{p/2} - b^p.$$

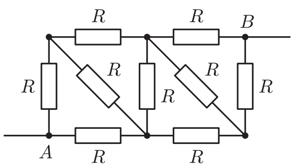
Pamiętamy jednak, że $(d - c/2)^2 + k = a^2$, $b^2 + k = (d + c/2)^2$. Otrzymujemy nierówność

$$a^p - \left(d - \frac{c}{2}\right)^p > \left(d + \frac{c}{2}\right)^p - b^p$$

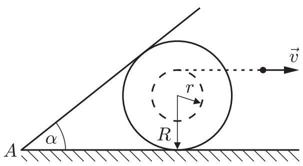
– czyli tezę zadania.

Klub 44

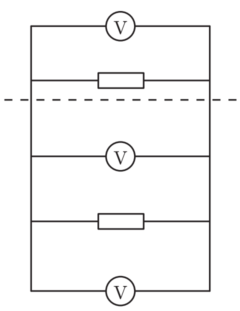
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2012



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Zadania z fizyki nr 534, 535

Redaguje Ewa CZUCHRY

534. Jaki jest opór między punktami A i B układu pokazanego na rysunku 1?

535. Szpulka nici toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni. Prędkość końca nitki jest skierowana poziomo i ma wartość v_0, wewnętrzny i zewnętrzny promień szpulki to r i R odpowiednio. Na szpulce opiera się deseczka zaczepiona zawiasem w punkcie A (rys. 2). Znaleźć prędkość kątową ω deseczki w zależności od kąta α.

Jak widać, Jerzy B. Brojan, po ponad 21 latach sterowania nawą Ligi Fizycznej, przekazuje dowództwo Ewie Czuchry. W imieniu redakcji składam dotychczasowemu Redaktorowi serdeczne podziękowania i jednocześnie zapewniam, iż dołożymy wszelkich starań, by Liga utrzymała swą dotychczasową rangę.

Marek Kordos

Rozwiązania zadań z numeru 11/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

526. Poniżej linii przerywanej (p. rys. 3) występuje jednorodne, prostopadłe do płaszczyzny rysunku i zmienne w czasie pole magnetyczne, a powyżej tej linii pola nie ma ($B = 0$). Oporności oporników są jednakowe, jednakowe są także trzy pola powierzchni objęte oczkami obwodu: między linią przerywaną a środkowym woltomierzem, między środkowym woltomierzem a dolnym opornikiem oraz między dolnym opornikiem a dolnym woltomierzem. Jeśli dolny woltomierz wskazuje 1 V, to jakie jest wskazanie pozostałych woltomierzy?

527. Lodówka pobiera ciepło od ciała A o temperaturze $T_1 = -5°$C i oddaje ciepło otoczeniu o temperaturze $T_0 = 20°$C, działając na następującej zasadzie. Naczynie o stałej objętości początkowo zawiera powietrze atmosferyczne o temperaturze T_0 i ciśnieniu $p_0 = 10^5$ Pa, następnie przy zachowaniu doskonałej izolacji termicznej pompa próżniowa obniża ciśnienie w naczyniu do osiągnięcia temperatury T_1. Dalej odpompowuje się powietrze aż do stanu bliskiego próżni, przy czym temperatura pozostaje równa T_1 wskutek pobierania ciepła od A. Następnie naczynie jest ponownie napełniane powietrzem atmosferycznym i cykl się powtarza. Ile wynosi minimalna wartość pracy pompy niezbędnej do odprowadzenia 1 J ciepła od A?

Pompa zawiera niewielki cylinder pozostający stale w temperaturze T_0 i tłok. Otwarcie zaworu łączącego cylinder z naczyniem następuje w chwili dojścia tłoka „do końca” (objętość cylindra równa zeru), po osiągnięciu przez tłok położenia przeciwnego następuje zamknięcie tego zaworu, a po cofnięciu tłoka do położenia, w którym powietrze pobrane z naczynia zostanie sprężone do ciśnienia p_0, następuje otwarcie zaworu umożliwiającego odprowadzenie na zewnątrz sprężonej partii gazu. Ten zawór zostaje zamknięty tuż przed otwarciem pierwszego. Na każdy cykl przemian w naczyniu próżniowym przypada wiele cykli pracy pompy. Powietrze należy uważać za gaz doskonały o cieple molowym C_V równym (5/2)R.

526. Oznaczmy siłę elektromotoryczną indukcji w każdym oczku jako $\mathcal{E}$ i przyjmijmy, że ma ona zwrot prawoskrętny – oczywiście wtedy prąd płynie przez oba oporniki prawoskrętnie. Napięcia na woltomierzach (U_1, U_2 i U_3) niech będą dodatnie, gdy plus jest po prawej stronie. Dla kolejnych oczek obowiązują równania

$$0 = -U_1 - IR,$$

$$\mathcal{E} = U_2 + IR, \qquad \mathcal{E} = -U_2 + IR, \qquad \mathcal{E} = U_3 - IR.$$

Widzimy, że $U_2 = 0$, $U_1 = -\frac{1}{2}U_3 = -0{,}5$ V.

527. Oznaczmy symbolami n_0 i n_1 początkową liczbę moli powietrza w naczyniu oraz liczbę moli w chwili osiągnięcia temperatury T_1. Z równania adiabaty w zmiennych p–T

$$pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const},$$

gdzie $\gamma = C_p/C_V = 1{,}4$, po przekształceniach znajdujemy n_1:

$$n_1 = n_0\left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Wyznaczymy teraz pracę pompy próżniowej przy odpompowaniu niewielkiej ilości powietrza $\mathrm{d}n$, przy założeniu, że ciśnienie w naczyniu pozostaje w przybliżeniu stałe i równe p. Jeśli objętość cylindra pompy jest równa V_c (zgodnie z podanym założeniem V_c jest znacznie mniejsze od objętości naczynia), to wejdzie do niego $\mathrm{d}n = pV_c/RT_0$ moli powietrza, a praca przeciw sile parcia z zewnątrz wyniesie $W_1 = (p_0 - p)V_c$. Sprężanie powietrza w cylindrze zachodzi izotermicznie, zatem praca

$$W_2 = \int_{V_c} (p_0 - p')\,\mathrm{d}V = \int_{V_c} \left(p_0 - \frac{pV_c}{V}\right)\mathrm{d}V,$$

gdzie dolna granica całki odpowiada zerowaniu się wyrażenia podcałkowego. Praca całkowita jest różnicą $W_1 - W_2$ i okazuje się równa

$$\mathrm{d}W = W_1 - W_2 = RT_0\ln(p_0/p)\cdot\mathrm{d}n.$$

Podczas odpompowania adiabatycznego ciśnienie p zależy od liczby moli n pozostałej w naczyniu wg równania $p = p_0(n/n_0)^\gamma$ i w wyniku całkowania otrzymujemy

$$W_{\text{ad}} = RT_0\int_{n_1}^{n_0} \ln\left(\frac{p_0}{p}\right)\mathrm{d}n = $$

$$= RT_0\gamma\left(n_0 - n_1\left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\right)\right).$$

Dla odpompowania izotermicznego zależność $p(n)$ ma postać $p = n\cdot p_0T_1/n_0T_0$ i całkowanie daje wynik

$$W_{\text{izot}} = RT_0n_1\left(1 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)\right).$$

Pozostaje obliczenie ciepła pobranego podczas odpompowania izotermicznego. W „zwykłej” przemianie izotermicznej (tzn. gdy $n = \mathrm{const}$, V jest zmienną) ciepło to jest równe

$$\mathrm{d}Q = -\mathrm{d}W = p\mathrm{d}V.$$

Tutaj zamiast zmiany objętości należy wprowadzić zmianę liczby moli $\mathrm{d}n$, która jest równoważna $\mathrm{d}V$, o ile $\mathrm{d}V/V = -\mathrm{d}n/n$. Dlatego $\mathrm{d}Q = -RT_1\mathrm{d}n$, a jeśli stanem końcowym jest próżnia, to $Q = RT_1 n_1$. Szukany iloraz

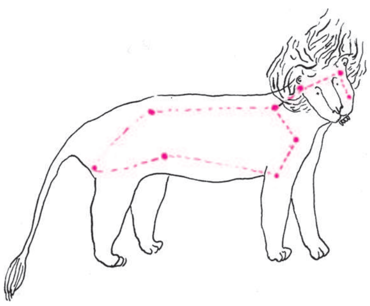
$$\eta = \frac{W_{\mathrm{ad}} + W_{\mathrm{izot}}}{Q} = \frac{T_0(\gamma n_0 - \gamma n_1 + n_1)}{T_1 n_1}$$

dla danych T_0, T_1 i γ przyjmuje wartość 1,48, co można porównać z

$$\frac{T_0}{T_1} - 1 = 0{,}093$$

dla cyklu Carnota. Głównym powodem tej dużej rozbieżności jest nieodwracalność wpuszczenia powietrza atmosferycznego do opróżnionego naczynia – gdyby wykorzystać pracę ciśnienia atmosferycznego w tej fazie (odjąć ją od $W_{\mathrm{ad}} + W_{\mathrm{izot}}$), to wartość η zmalałaby do 0,109.

Marzec



Marcowe noce są jeszcze dosyć długie, a że już coraz cieplejsze, zachęcają do obserwacji. Nisko, nad południowo-zachodnim horyzontem, na pograniczu Barana, Wieloryba i Ryb, wschodzić będzie Jowisz (−2,2 mag). Choć możemy podziwiać go przez cały miesiąc, to jednak z każdym dniem będzie zachodził coraz wcześniej, w pierwszej połowie nocy. Podobnie też wyjątkowo jasną Wenus (−4,2 mag), pojawiającą się w Rybach nad zachodnim horyzontem, obserwować można będzie przez cały miesiąc, ale jedynie wieczorem. Tuż po zachodzie Słońca, na wschodzie, w gwiazdozbiorze Lwa, ujrzymy Marsa (−1,2 mag) – do końca miesiąca widoczny on będzie przez całą noc. Późnym wieczorem w Pannie wschodzi nieco ciemniejszy Saturn (+0,4 mag).

Neptun, podobnie jak Merkury i Uran, pojawia się nad horyzontem w blasku wschodzącego Słońca. Najwcześniej wschodzi Uran, ale ze względu na swą niewielką jasność (+5,9 mag) i wschodzące Słońce raczej nie będzie się nadawał do obserwacji.

W marcowe noce warto spojrzeć na gwiazdozbiór Lwa. Łatwo go odnaleźć, bowiem leży tuż pod górującą niemal w zenicie Wielką Niedźwiedzicą. Jest to dosyć rozległa i bogata w gwiazdy konstelacja – przy dobrej pogodzie nawet nieuzbrojonym okiem możemy dostrzec 70 gwiazd. Najjaśniejszą gwiazdą i sercem Lwa jest Regulus (α Leo). Nazwę tę, oznaczającą „Małego Króla", nadał mu Mikołaj Kopernik. Z jasnością +1,35 mag jest Regulus jedną z najjaśniejszych gwiazd naszego nieba, ale nie to czyni go ciekawym obiektem. Już za pomocą niewielkiej lornetki dostrzeżemy, że jest to gwiazda podwójna. Składnik główny jest karłem typu widmowego B7 i jasności 150 razy większej niż Słońce. Natomiast składnik wtórny w niewielkim teleskopie sam okazuje się układem dwóch karłów (Regulus B i C) o typach widmowych K2 i M4 oraz jasnościach, odpowiednio, +8,1 mag i +13,5 mag. Separacja tych składników wynosi 100 jednostek astronomicznych, a okres orbitalny 2000 lat. Układ Regulus B i C jest oddalony od składnika A o 4200 jednostek astronomicznych. Zupełnie niedawno, bo w 2008 roku, odkryto, że Regulus A ma jeszcze jednego, słabego towarzysza. Jest nim biały karzeł o masie około 0,3 $\mathrm{M}_\odot$, obiegający składnik główny z okresem 40,11 dnia w odległości prawdopodobnie 0,35 jednostki astronomicznej. Układ ten (Regulus A i biały karzeł) jest szczególnie ciekawy ze względu na większą gwiazdę. Regulus A, przy promieniu kilka razy większym niż promień Słońca, obraca się wokół swojej osi z okresem 15,9 godziny. Dla porównania okres rotacji Słońca wynosi, w zależności od szerokości heliograficznej, od 25 dni na równiku do 31 dni na biegunach. Prędkość rotacji Regulusa A jest bliska wartości, przy której siła odśrodkowa staje się większa niż grawitacja i gwiazda może ulec zniszczeniu. Przy tak krótkim okresie obrotu gwiazda jest mocno spłaszczona, promień biegunowy wynosi 3,15 promienia Słońca (3,15 $\mathrm{R}_\odot$), równikowy zaś aż 4,16 $\mathrm{R}_\odot$. Nie jest jasne, czy orbita białego karła, krążącego wokół tak zdeformowanej gwiazdy, jest stabilna, a zatem jaka będzie przyszłość tego skomplikowanego układu.

Pełnia Księżyca przypada 8 III, a nów 22 III. Wiosna rozpoczyna się 20 III. W marcu można będzie obserwować szereg koniunkcji: 13 III Antaresa z Księżycem (kiedy to odległość między nimi wynosić będzie 4°44'), 14 III Wenus i Jowisza (3°01'), 25 III Księżyca i Jowisza (3°01') oraz 26 III Księżyca i Wenus (1°50'). Tylko trzy roje meteorów o średniej aktywności będą miały swoje maksima w marcu: 13 III Gamma Normidy, z przewidywanymi 8 zjawiskami na godzinę, Virginidy (obecnie Antyhelion), kilka maksimów w okresie od 15 III do 15 IV z 5 zjawiskami na godzinę, oraz 30 III Delta Pavonidy, również z 5 zjawiskami na godzinę. Zatem czystego nieba!

Agnieszka MAJCZYNA

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 522 ($WT = 2{,}10$) i 523 ($WT = 2{,}00$) z numeru 9/2011

Tomasz Wietecha	Tarnów	45,71
Jacek Piotrowski	Rzeszów	38,72
Michał Koźlik	Gliwice	30,22

Ósmy raz przebiegł Pan Tomasz metę 44 punktów w Klubie 44 F!

Rozwiązanie zadania M 1344.
Dla każdej pary uczniów popatrzmy na zbiór zadań, których żaden z dwójki *nie* rozwiązał. Tych zbiorów jest $\binom{100}{2}$. Chcemy pokazać, że przynajmniej jeden z nich jest pusty. Zauważmy, że dla każdego zadania istnieje co najwyżej 44 uczniów, którzy go nie rozwiązali. Zatem każde zadanie należy do co najwyżej $\binom{44}{2}$ spośród naszych zbiorów. Niepustych zbiorów jest więc co najwyżej $5 \cdot \binom{44}{2} = 4730 < 4950 = \binom{100}{2}$. Zatem istnieje para uczniów, dla której zbiór zadań, których żaden z uczniów z pary nie rozwiązał, jest pusty.