

Dodajmy na koniec, że wzór $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1$, z pozoru absurdalny, może mieć jednak pewien sens. Możemy napisać równość

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-a) - (z-a)} = \frac{1}{1-a} \left(1 + \frac{z-a}{1-a} + \left(\frac{z-a}{1-a} \right)^2 + \left(\frac{z-a}{1-a} \right)^3 + \dots \right),$$

która zachodzi dla każdej liczby zespolonej z , dla której spełniona jest

nierówność $\left| \frac{z-a}{1-a} \right| < 1$; litera a też oznacza liczbę zespoloną. Przyjmując

kolejno $a = 0$, $a = i$, $a = \frac{5}{4} + i$, $a = \frac{9}{4} + i$, otrzymujemy koła otwarte o środkach w wymienionych punktach i promieniach $|1-a|$, czyli 1 , $\sqrt{2}$, $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{17}$, $\frac{1}{4} \cdot \sqrt{41}$.

Każde dwa kolejne mają punkty wspólne, a ostatnie zawiera liczbę $z = 2$.

Funkcja $\frac{1}{1-z}$ jest więc przedstawiana różnymi wzorami w kolejnych kołach.

Można więc myśleć, że $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots = \frac{1}{1-2}$ to wartość funkcji, która w kole opisanym nierównością $|z| < 1$ jest zdefiniowana jako $1 + z + z^2 + \dots$, przedłużonej w rozsądny sposób poza to koło, tak że liczba 2 znajduje się w dziedzinie tego przedłużenia. W tym przypadku wyglądać może to na udziwnianie, ale w innych sytuacjach bywa inaczej: dany jest szereg i nie wiadomo, jaką funkcję przedstawia – to prowadzi do pojęcia funkcji analitycznej, zresztą na ogół wielowartościowej. Pisał o tym już Leonhard Euler (1707–1783), ale precyzyjne definicje pojawiły się po ponad stu latach.



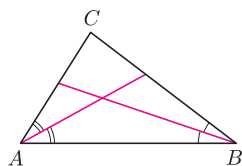
Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 805. Po odsłuchaniu zapisu na taśmie magnetofonowej okazało się, że promień nawiniętej taśmy zmniejszył się dwukrotnie w czasie $t_1 = 20$ minut. Po jakim dodatkowym czasie t_2 promień nawiniętej taśmy zmniejszy się znowu dwukrotnie? Rozwiązanie na str. 10



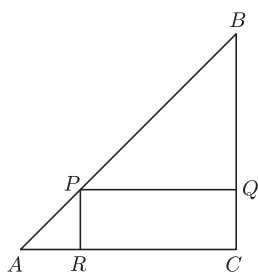
F 806. Na pustą szpulę starego magnetofonu, obracającą się ze stałą prędkością kątową, nawija się taśma magnetyczna. Po zakończeniu nawijania w czasie t_1 okazało się, że promień nawiniętej taśmy r_k jest trzy razy większy od początkowego promienia r_0 . W jakim czasie można nawinąć na tę samą szpulę taśmę magnetyczną takiej samej długości, ale dwa razy cieńszą? Rozwiązanie na str. 15



Rys. 1

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1339. W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku A ma większą miarę niż kąt przy wierzchołku B (rys. 1). Wykazać, że dwusieczna poprowadzona z wierzchołka B jest dłuższa niż dwusieczna poprowadzona z wierzchołka A . Rozwiązanie na str. 10



Rys. 2

M 1340. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego równoramiennego ABC wybrano punkt P . Niech Q i R będą rzutami prostokątnymi punktu P na boki BC i CA (rys. 2). Udowodnić, że pole którejś z figur ARP , PQB , $PRCQ$ stanowi co najmniej $\frac{4}{9}$ pola trójkąta ABC . Rozwiązanie na str. 24

M 1341. Dane są liczby rzeczywiste a, b, c, d , takie że $b < c < d$. Udowodnić nierówność

$$(a + b + c + d)^2 > 8(ac + bd).$$

Rozwiązanie na str. 11