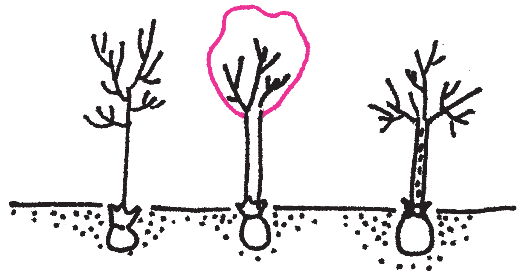
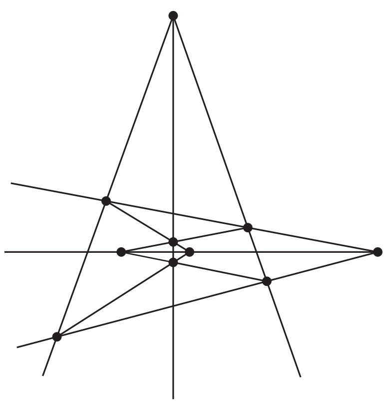
mała delta



O sadzeniu drzew



Rys. 1

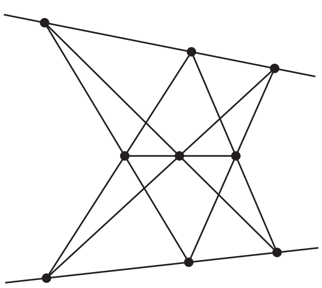
Girard Desargues, matematyk, architekt ogrodów, doradca kardynała Richelieu (a więc rówieśnik Atosa, Portosa i Aramisa) postawił kolegom ogrodnikom pytanie:

Jak posadzić 10 drzew w dziesięciu rzędach po 3 drzewa w każdym rzędzie?

I kiedy oni doszli do wniosku, że widać matematycy nie są całkiem normalni, przedstawił im widoczne obok rozwiązanie.

Natomiast kolegom matematykom wytłumaczył, że taka możliwość bierze się stąd, iż żyjemy w trójwymiarowej przestrzeni. Można bowiem – patrząc uważnie na ten rysunek – dopatrzyć się w nim czworościanu przeciętego płaszczyzną.

* * *



Rys. 2

Zasłyszawszy o tym, Blaise Pascal, matematyk, fizyk, filozof, bezbożnik i teolog, konstruktor arytmometru, wynalazca taczek, i tak dalej, i dalej..., człowiek szalenie ambitny, postanowił, że zmierzy się z trudniejszym pytaniem:

Jak posadzić 9 drzew w dziewięciu rzędach po 3 drzewa w każdym rzędzie?

I faktycznie pokazał, jak te drzewa trzeba posadzić – rysunek jest obok.

Każdy z nas może wykonać oba te rysunki, bo wykonuje się je „byle jak" – należy po prostu rysować po kolei proste usytuowane podobnie, jak na tych rysunkach, a ostatnia prosta zawsze „sama wyjdzie". Proszę spróbować!

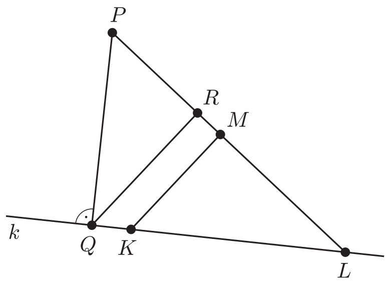
Uzasadnienie jednak, że zadanie Pascala ma rozwiązanie, w matematyce jest równoważne temu, że... $a \cdot b = b \cdot a$ – i kto by to pomyślał! Nie jest jednak łatwo się o tym przekonać.

* * *

Ćwierć tysiąclecia później Gino Fano, jeden z członków słynnej Włoskiej Szkoły Matematycznej, na wzór której po pierwszej wojnie światowej powstała Polska Szkoła Matematyczna, udowodnił, że siedmiu drzew nie da się posadzić w siedmiu rzędach, po trzy w każdym rzędzie, bo gdyby się dało, to dałoby się również sprawdzić, że $1 + 1 = 0$. To już wymaga wyższej szkoły jazdy.

* * *

No, a co z ósemką? To zadanie dla Ciebie, Czytelniku.



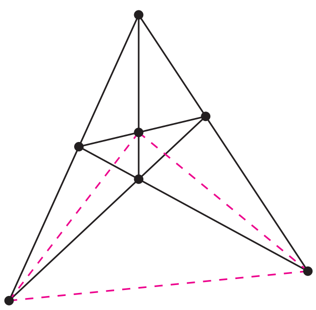
Rys. 3

James Joseph SYLVESTER, Anglik, najpierw kabareciarz, potem matematyk, Ojciec Założyciel matematyki amerykańskiej (wykładał tam przed i po wojnie secesyjnej), patrząc na rysunki Desarguesa i Pascala, zauważył, że są na nich (nienarysowane) rzędy, w których są tylko dwa drzewa. Postawił więc pytanie:

A czy istnieje sad, w którym nie wszystkie drzewa stoją w jednym rzędzie, ale w każdym rzędzie są co najmniej 3 drzewa?

I choć odpowiedź wydawała się oczywista – nie (oczywiście rozpatrujemy tylko sady ze skończoną liczbą drzew), to ładny dowód został podany dopiero 60 lat temu. Przedstawił go Theodore MOTZKIN. Oto ten dowód.

Przypuśćmy, że jest sad mający skończoną liczbę drzew, które nie wszystkie stoją w jednym rzędzie, ale na każdej prostej wyznaczonej przez dwa drzewa rośnie jeszcze co najmniej jedno drzewo. Dla każdego drzewa wybierzmy ten rząd drzew, do którego ono nie należy, ale do którego ma najbliżej (jeśli jest takich kilka, to wybierzmy któryś z nich). Teraz wśród wybranych par (drzewo, rząd) wybierzmy tę, dla której odległość ta jest najmniejsza. Niech parą tą będzie (P, k). Oznaczmy przez Q rzut P na k. Zgodnie z naszym przypuszczeniem na k są co najmniej trzy punkty, zatem co najmniej dwa z nich leżą po jednej stronie punktu Q (zakładamy, że każda ze stron zaczyna się od punktu Q) – oznaczmy je kolejno K i L (rysunek 3). Wtedy wysokość QR w trójkącie prostokątnym PQL jest krótsza od PQ. Na dodatek $KM \leqslant QR$. Zatem odległość punktu K od prostej PL jest mniejsza od odległości P od k, która miała być najmniejsza – otrzymana sprzeczność kończy dowód.

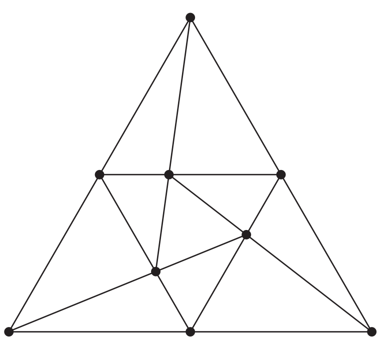


Rys. 4

Istnieje też praca z 1951 roku (G.A. Dirac), która głosi, że dla $n > 7$ „dwudrzewnych” rzędów jest co najmniej $\frac{n}{2}$, ale dowód jest tak zawiły, że niewielu chce go zaakceptować.

Powstało więc pytanie, ile co najmniej jest takich „dwudrzewnych” rzędów w sadzie złożonym z n drzew. Motzkin udowodnił (1951), że więcej niż $\sqrt{2n} - 2$, L.M. Kelly i W.O.J. Moser wykazali (1958), że jest ich co najmniej $\frac{3n}{7}$ i że tego już poprawić się nie da, co widać na rysunku 4.

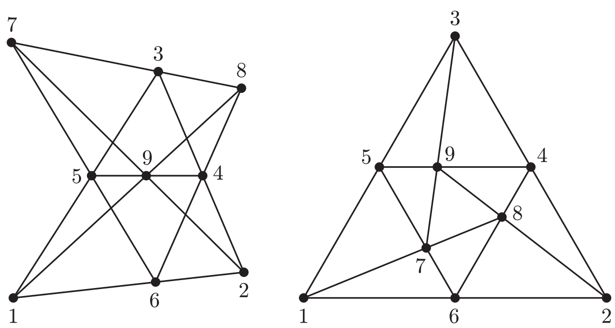
* * *



Rys. 5

Problem Pascala można rozwiązać też w inny sposób (rys. 5). Ale jak się przekonać, że ten sposób jest inny? Ponumerujmy punkty w obu obrazkach ilustrujących problem dziewięciu drzew (rys. 6).

Jeżeli ustalimy na każdym z nich punkty 1, 2, 3, 4, 5, 6, to na obrazku z lewej możemy punkt 7 dobrać prawie dowolnie na prostej 56 i dokończyć rysunek. Natomiast na obrazku z prawej poruszenie punktu 7 nie pozwoli rysunku dokończyć. Zatem rysunki te są rzeczywiście różne, a nie tylko inaczej narysowane.



Rys. 6

W geometriach dyskretnych wielokąt $\mathcal{B}$ nazywamy *wpisanym* w wielokąt $\mathcal{A}$, jeśli ma on wierzchołki na prostych zawierających boki wielokąta $\mathcal{A}$.

Na obu rysunkach trójkąt 123 jest wpisany w trójkąt 789, ten z kolei jest wpisany w trójkąt 456, a ten – o dziwo – w trójkąt 123.

No, a czy można znaleźć takie trójkąty $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, by $\mathcal{A}$ był wpisany w $\mathcal{B}$, a $\mathcal{B}$ w $\mathcal{A}$?

Okazuje się, że nie.

Ale dla pięciokątów jest to już możliwe, co więcej, takie pięciokąty są już na tych stronach narysowane. Kto nie umie ich odszukać, niech poszuka na innych stronach.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS