Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2012

Zadania z fizyki nr 532, 533

Redaguje Jerzy B. BROJAN

532. Ciężarek o masie m_1 wisiał na sprężynce o stałej sprężystości k i drgał z amplitudą A_1. Z góry sypie się w tempie $\alpha = \mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ cienki strumień piasku, który spada ze stałą prędkością v_p (stałą wskutek np. działania siły oporu powietrza). Piasek pada na ciężarek i przykleja się, dalej drgając razem z nim. Po czasie długim w porównaniu z okresem drgań masa ciężarka wraz z piaskiem wzrosła do wartości m_2. Znaleźć końcową amplitudę drgań. Założyć, że prędkość ruchu ciężarka nie przekraczała prędkości spadku piasku.

533. Wodór H_2 znajduje się w temperaturze 300 K pod ciśnieniem 100 Pa w naczyniu o stałej objętości. Ile będzie wynosić ciśnienie w naczyniu, jeśli ogrzać wodór do temperatury $3 \cdot 10^6$ K?

Rozwiązania zadań z numeru 10/2011

Przypominamy treść zadań:

524. Kula o masie $m_1 = 2$ kg, poruszająca się z prędkością początkową $v_1 = 1$ m/s, zderzyła się centralnie i doskonale sprężyście z kulą o masie m_2, początkowo spoczywającą. Druga kula zderzyła się w podobny sposób z trzecią kulą o masie m_3, ta z kolei z czwartą, czwarta z piątą itd. aż do kuli o numerze 2011. Dana jest masa ostatniej kuli $m_{2011} = 1$ kg. Dobrać masy pośrednie tak, aby ostatnia kula uzyskała największą prędkość, przy ustalonych wartościach m_1, v_1 i m_{2011}. Ile wynosi ta największa prędkość? Pominąć efekty związane z obrotem kul.

525. Do naczynia nalano słonej wody, a na wierzch – wody czystej, tak że wysokość słupa wody wynosi $h = 30$ cm, a gęstość zmienia się liniowo z wysokością od $\rho_0 = 1$ g/cm^3 przy powierzchni do $\rho_1 = 1{,}1$ g/cm^3 przy dnie. W połowie głębokości naczynia pływa w stanie równowagi nurek Kartezjusza – niewielka probówka ze szkła o gęstości $\rho_s = 3$ g/cm^3, zawierająca pewną ilość powietrza i otwarta od dołu. Czy ten stan równowagi jest trwały ze względu na małe przesunięcia pionowe nurka? Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_a = 10^5$ Pa.

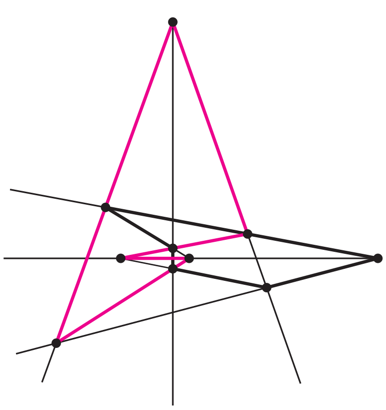
524. Gdy funkcja wielu zmiennych osiąga maksimum, jest to także jej maksimum jako funkcji każdej ze zmiennych oddzielnie (gdy pozostałe zmienne uważamy za stałe). Rozważmy więc trzy kule o numerach i, $i+1$ oraz $i+2$. Z zasad zachowania energii i pędu oraz warunku zerowej prędkości początkowej kul $i+1$ i $i+2$ wyprowadzamy standardowe wzory

$$v_{i+1} = \frac{2m_i v_i}{m_i + m_{i+1}}, \quad v_{i+2} = \frac{2m_{i+1} v_{i+1}}{m_{i+1} + m_{i+2}} = \frac{2m_i}{m_i + m_{i+1}} \, \frac{2m_{i+1}}{m_{i+1} + m_{i+2}} v_i.$$

Należy wyznaczyć maksimum ostatniego wyrażenia ze względu na zmienną m_{i+1}. Nietrudno sprawdzić, że jest ono osiągane dla $m_{i+1} = \sqrt{m_i m_{i+2}}$, tzn. masy powinny tworzyć ciąg geometryczny. Ilorazem tego ciągu jest $q = \sqrt[2010]{m_{2011}/m_1} = 0{,}999655$, natomiast prędkości tworzą ciąg o ilorazie $2/(1+q)$. Zatem

$$v_{2011} = v_1 \left(\frac{2}{1 + (1/2)^{1/2010}} \right)^{2010} = 1{,}4142 \text{ m/s}.$$

Dopiero na dalszych miejscach po przecinku wynik różni się od $\sqrt{2}$ m/s. Energia kinetyczna ostatniej kuli jest więc prawie dokładnie równa początkowej energii kinetycznej (po zderzeniach z kulą poprzednią i następną każda z kul pozostaje prawie nieruchoma).



Pięciokąty wzajemnie wpisane – patrz str. 13

525. Przemieszczenie nurka o mały odcinek $\mathrm{d}h$ w górę powoduje spadek siły wyporu o wielkość $\mathrm{d}F_1$ wynikającą ze spadku gęstości wody

$$|\mathrm{d}F_1| = (V + V_s) g \mathrm{d}\rho,$$

gdzie V jest objętością powietrza w nurku, V_s – objętością szkła, a $\mathrm{d}\rho = \dfrac{\rho_1 - \rho_0}{h}\mathrm{d}h$. Z drugiej strony, nastąpi wtedy wzrost siły wyporu o wielkość

$$\mathrm{d}F_2 = \rho_{\text{śr}} g \mathrm{d}V,$$

gdzie $\rho_{\text{śr}} = \frac{1}{2}(\rho_0 + \rho_1)$, a $\mathrm{d}V$ jest wzrostem objętości, będącym skutkiem spadku ciśnienia i rozprężenia powietrza w nurku. Warunkiem równowagi trwałej jest

$$|\mathrm{d}F_1| > \mathrm{d}F_2, \quad \text{czyli} \quad (V + V_s) g \frac{\rho_1 - \rho_0}{h} \mathrm{d}h > \rho_{\text{śr}} g \mathrm{d}V.$$

Wyznaczamy $\mathrm{d}V$ na podstawie prawa przemiany izotermicznej, gdyż powietrza w nurku jest niewiele i kontakt ze ściankami zapewnia stałość temperatury. Zatem $p\mathrm{d}V + V\mathrm{d}p = 0$, albo

$$\mathrm{d}V = V \frac{|\mathrm{d}p|}{p_{\text{śr}}},$$

gdzie $|\mathrm{d}p| = \rho_{\text{śr}} g \mathrm{d}h$, a $p_{\text{śr}}$ jest ciśnieniem w położeniu równowagi nurka, czyli sumą ciśnienia atmosferycznego i ciśnienia górnej połowy słupa wody. Średnia gęstość wody w górnej połowie wynosi $\frac{1}{4}(3\rho_0 + \rho_1)$, zatem

$$p_{\text{śr}} = p_a + \frac{1}{4}(3\rho_0 + \rho_1) g \frac{1}{2} h.$$

W ostatnim kroku zauważamy, że z warunku równowagi, przy pominięciu masy powietrza w nurku, wynika równanie

$$\rho_{\text{śr}}(V + V_s) = \rho_s V_s.$$

Po przekształceniach dochodzimy do warunku równowagi trwałej w postaci

$$\frac{\rho_s}{\rho_s - \rho_{\text{śr}}} \frac{\rho_1 - \rho_0}{h} > \frac{\rho_{\text{śr}}^2 g}{p_{\text{śr}}}.$$

Dla podanych wartości liczbowych warunek ten jest spełniony z dużym naddatkiem (lewa strona jest prawie 5-krotnie większa od prawej).

* * *

Oto kilka uwag na temat rozwiązań nadesłanych przez naszych Czytelników.

Zadanie **511** [Przepływ cieczy lepkiej przez rurkę] (współczynnik trudności $WT = 1{,}60$, liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 4$). Zadanie okazało się ze strony redaktora Ligi złym pomysłem: czterech korespondentów (**M. Koźlik**, **A. Idzik**, **T. Wietecha** i **J. Witkowski**) przysłało dobre rozwiązania, ale wszyscy powołali się na „podręcznikowy" wzór Hagena–Poiseuille'a i jego standardowe wyprowadzenie. Dobre zadanie ligowe powinno natomiast wymagać od rozwiązujących przede wszystkim inwencji, a nie erudycji.

Zadanie **513** [Adiabatyczne sprężenie gazu, w którym unosi się bańka mydlana] ($WT = 3{,}15$, $LPR = 1$). Obok poprawnego (ale numerycznego i przez to niezbyt eleganckiego) rozwiązania **A. Idzika** należy wyróżnić rozwiązanie **A. Nowogrodzkiego**, odwołujące się do prostej argumentacji „... dla małego promienia bańki ciśnienie jest większe niż dla bańki o dużym promieniu. Przesuwając tłok, sprężamy gaz, średnica bańki zmaleje, a ciśnienie wewnątrz wzrośnie nieproporcjonalnie bardziej. Większy wzrost ciśnienia spowoduje większy wzrost temperatury...". Chyba ocena tej pracy tylko na 0,4 była krzywdząca, prosimy o wybaczenie!

Zadanie **518** [Źródło dźwięku porusza się jednostajnie po prostej, badamy wykres częstotliwości rejestrowanej przez mikrofon położony z boku] ($WT = 3{,}05$, $LPR = 1$). Chociaż sześciu Czytelników przystąpiło do rozwiązania, tylko **A. Idzik** i **T. Wietecha** wzięli pod uwagę zasadniczy punkt – rozróżnienie czasów wysłania i odebrania sygnału. Z tej dwójki tylko p. Idzik doszedł do poprawnego wniosku.

Zadanie **520** [Małe drgania ciężarków wiszących na nici przełożonej przez blok ekscentryczny] ($WT = 1{,}83$, $LPR = 4$). Wyniki **T. Wietechy** i **M. Koźlika** okazały się prawidłowe, choć wyprowadzone przy dziwnym założeniu, że całość układu drgającego jest bryłą sztywną. Poza nimi dość dobre były jeszcze rozwiązania **J. Piotrowskiego** i **A. Idzika**.

Rozszerzona czołówka ligi zadaniowej
Klub 44 F
po 521 zadaniach

Tomasz Wietecha (Tarnów)	7–43,71
Jacek Piotrowski (Rzeszów)	1–38,72
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	37,70
Tomasz Rudny (Warszawa)	35,20
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	2–33,19
Michał Koźlik (Gliwice)	1–28,33
Dariusz Wilk (Rzeszów)	26,57
Radosław Poleski (Kołobrzeg)	23,47
Krzysztof Magiera (Łosiów)	2–17,02
Ryszard Woźniak (Kraków)	16,47

Lista obejmuje uczestników, którzy przysłali co najmniej jedno rozwiązanie zadania z roczników 2009–2011 oraz mają w bieżącej rundzie na swoim koncie co najmniej 15 punktów. Cyfra przed kreską wskazuje, ile razy uczestnik zdobył już 44 punkty.

Weterani Klubu 44 F (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana): P. Bała, D. Lipniacki, A. Sikorski, A. Surma (4), P. Gworys, A. Idzik (10), T. Wietecha (7), J. Łazuka, M. Wójcicki, J. Witkowski (jeśli uczestnik zdobył 44 punkty więcej niż 3 razy, podana została odpowiednia liczba).

Pozostali członkowie Klubu 44 F (alfabetycznie):

„dwukrotni": J. Lipkowski, K. Magiera, A. Nowogrodzki, P. Perkowski;

„jednokrotni": A. Borowski, P. Gadziński, Z. Galias, A. Gawryszczak, A. Gluza, W. Kacprzak, K. Kapcia, M. Koźlik, M. Łącki, B. Mikielewicz, L. Motyka, R. Musiał, J. Piotrowski, T. Rawlik, R. Repucha, J. Stelmach, L. Szalast, T. Tkocz, P. Wach.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2012

Zadania z matematyki nr 635, 636

Redaguje Marcin E. KUCZMA

635. Niech A, B, C, D, K będą pięcioma różnymi punktami, leżącymi na jednym okręgu. Odległości punktu K od prostych AB, BC, CD, DA wynoszą odpowiednio a, b, c, d. Znaleźć wzór algebraiczny, pozwalający wyznaczyć dowolną z liczb a, b, c, d, gdy znane są trzy pozostałe.

636. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2}} - \frac{1}{x_n} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Wykazać, że ciąg $(2^n x_n)$ jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

Zadanie 636 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2011

Przypominamy treść zadań:

627. W okienka tabeli prostokątnej o rozmiarach $n \times 2$ (n wierszy, 2 kolumny, $n > 2$) wpisujemy liczby od 1 do $2n$, losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem każdego rozmieszczenia. Które z następujących zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?

(A) W dokładnie jednym wierszu znajdzie się para liczb różniących się o 1.
(B) W żadnym wierszu nie znajdzie się para liczb różniących się o 1.

628. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ściśle rosnącą, odwzorowującą zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ na cały zbiór $\mathbb{Q}$. Czy stąd wynika, że funkcja f jest przedziałami liniowa (tzn. że $\mathbb{R}$ jest sumą skończenie lub nieskończenie wielu przedziałów dodatniej długości, o rozłącznych wnętrzach, i w każdym z tych przedziałów f jest liniowa)?

627. Weźmy pod uwagę dowolne rozmieszczenie typu (B). Niech m będzie liczbą sąsiadującą w wierszu z liczbą 1; zatem $m \geqslant 3$. Wykonujemy następującą operację:

Każdą liczbę $k \in \{2, \ldots, m-1\}$ zmniejszamy o 1, zaś jedynkę zastępujemy przez $m-1$; pozostałych liczb nie zmieniamy. (Na ilustracji przykładowe rozmieszczenie typu (B) dla $n = 5$, w którym $m = 7$, oraz nowe rozmieszczenie, powstałe w wyniku opisanej operacji).

$$\begin{matrix} 5 & 8 \\ 10 & 6 \\ 2 & 4 \\ 7 & 1 \\ 9 & 3 \end{matrix} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} 4 & 8 \\ 10 & 5 \\ 1 & 3 \\ 7 & 6 \\ 9 & 2 \end{matrix}$$

W nowym rozmieszczeniu widzimy wiersz, w którym sąsiadują ze sobą dwie liczby różniące się o 1, mianowicie $m-1$ i m. Jest to jedyny taki wiersz – bowiem w pozostałych wierszach moduł różnicy między oboma wyrazami albo się zwiększył, albo pozostał niezmieniony. Uzyskaliśmy więc rozmieszczenie typu (A).

Zauważmy, że widząc uzyskane rozmieszczenie, jesteśmy w stanie jednoznacznie odtworzyć rozmieszczenie wyjściowe: mamy wiersz z liczbami $m-1$ i m; trzeba zastąpić $m-1$ przez jedynkę, zaś każdą liczbę $j \in \{1, \ldots, m-2\}$ trzeba zwiększyć o 1.

Opisana operacja określa zatem różnowartościową funkcję ze zbioru rozmieszczeń typu (B) do zbioru rozmieszczeń typu (A). Jednak *nie na cały* ów zbiór. Przecież rozmieszczenie typu (A) może mieć w jednym wierszu liczby 1, 2 (a w pozostałych wierszach pary liczb, różniących się więcej niż o 1). Natomiast opisana operacja produkuje rozmieszczenia z pojedynczymi wierszami postaci $[m-1, m]$ lub $[m, m-1]$, gdzie $m \geqslant 3$.

Wniosek: jest więcej rozmieszczeń typu (A); wylosowanie takiego rozmieszczenia jest bardziej prawdopodobne niż typu (B).

628. Nie wynika. Prosty kontrprzykład: określamy funkcję f najpierw w przedziale $\langle 0; 1\rangle$ wzorem

$$f(x) = \frac{x}{2-x} = \frac{2}{2-x} - 1 \quad \text{dla } x \in \langle 0; 1\rangle.$$

Jest ona w tym przedziale ściśle rosnąca, ściśle wypukła i odwzorowuje przedział $\langle 0; 1\rangle$ na cały ten przedział; łatwo wyznaczyć funkcję odwrotną:

$$f^{-1}(y) = \frac{2y}{1+y} = 2 - \frac{2}{1+y} \quad \text{dla } y \in \langle 0; 1\rangle.$$

Widać, że jeżeli x, y są liczbami wymiernymi z przedziału $\langle 0; 1\rangle$, to $f(x)$, $f^{-1}(y)$ też są liczbami wymiernymi z przedziału $\langle 0; 1\rangle$. Zatem obrazem zbioru $\mathbb{Q} \cap \langle 0; 1\rangle$ jest ten sam zbiór.

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 623 ($WT = 1{,}09$) i 624 ($WT = 2{,}27$) z numeru 6/2011

Piotr Sobczak	44,68
Tomasz Warszawski	2–42,26
Paweł Kubit	4–40,94
Janusz Olszewski	12–40,27
Tomasz Tkocz	2–38,41
Zbigniew Skalik	1–37,25
Michał Miodek	35,88
Roksana Słowik	34,62
Zbigniew Sewartowski	1–31,04
Rami Marcin Ayoush	30,55
Jan Czardybon	30,48
Andrzej Daniluk	2–29,74
Andrzej Dorobisz	29,11
Adam Dzedzej	1–28,56
Jerzy Cisło	8–28,30
Paweł Łabędzki	26,92
Krzysztof Kamiński	1–25,94
Tomasz Kochanek	24,75
Witold Bednarek	5–24,70
Jerzy Witkowski	5–24,14
Tomasz Wietecha	8–23,80
Tomasz Czajka	23,20
Andrzej Idzik	1–22,68
Krzysztof Dorobisz	3–22,64
Michał Koźlik	22,17

Legenda (przykładowo): stan konta 8–23,80 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 23,80 punktu.

W tej kolejce 44 punkty przekroczył **Piotr Sobczak** – to nowe nazwisko w naszym Klubie.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:

– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 20 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2009, 2010 lub 2011.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, K. Serbin, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (11), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (12), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (8), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek, P. Kubit (4), J. Cisło (8), W. Bednarek (5), D. Kurpiel, P. Najman (5), M. Kieza (4), M. Kasperski, K. Dorobisz, A. Woryna

(jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni": Z. Bartold, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, P. Jędrzejewicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, J. Łazuka, J. Małopolski, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, K. Patkowski, K. Pióro, J. Siwy, S. Solecki, T. Tkocz, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni": T. Biegański, W. Boratyński, M. Czerniakowska, A. Dzedzej, P. Figurny, M. Fiszer, Ł. Garncarek, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, A. Idzik, K. Jachacy, M. Jastrzębski, A. Jóźwik, K. Kamiński, G. Karpowicz, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, M. Łupieżowiec, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, F. S. Sikorski, Z. Skalik, A. Smolczyk, P. Sobczak, M. Spychała, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, *K. Trautman*, P. Wach, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, P. Żmijewski.

Rozszerzamy f do funkcji $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, przesuwając jej wykres o wektor $[1,1]$ i jego całkowite wielokrotności. Formalnie: przyjmujemy

$$f(k+r)=k+f(r)\quad \text{dla}\quad k\in\mathbb{Z},\ r\in\langle 0;1).$$

Tak rozszerzona funkcja f jest ściśle rosnąca; w każdym z przedziałów $\langle k;k+1\rangle$ jest ściśle wypukła – więc nie jest liniowa w żadnym przedziale długości dodatniej. Wreszcie, jest jasne, że obrazem zbioru $\mathbb{Q}$ jest cały zbiór $\mathbb{Q}$.

* * *

Początek tegorocznego omówienia ligi zadaniowej można by właściwie skopiować z omówienia zeszłorocznego: było kilka bardzo fajnych zadań – a najlepsze zadania pochodziły z propozycji uczestników ligi.

Na szczególną uwagę zasługuje niebanalna nierówność (**616**) oraz intrygująca konfiguracja geometryczna (**618**). W obu tych zadaniach – jak i w paru innych, włączonych do omówienia – to uczestnicy znajdowali najciekawsze rozwiązania, bardzo oryginalne i z reguły zgrabniejsze od proponowanych przez nas rozwiązań „firmowych".

Jak co roku, przedstawiamy wybrane rozwiązania, w formie (z konieczności) bardzo skrótowej. Wszystkich Czytelników, którzy lubią tego typu zadania, mocno zachęcamy do uzupełnienia szczegółów w owych rozumowaniach i do ich starannego prześledzenia; one naprawdę na to zasługują.

Niebagatelny udział w ich dostarczaniu miał uczestnik, będący aktualnie niezagrożonym liderem zmagań ligowych – mający w dorobku dwanaście czterdziestoczteropunktowych rund. I nic nie wskazuje, by którakolwiek kolejna runda miała być już ostatnią!...

Zadanie **607** [$X=\{1,\ldots,n\}$, $n>3$; znaleźć $\max m:\exists\, A_1,\ldots,A_m\subset X\ \forall\, i,j\ (i\neq j)$: $A_i\not\subset A_j$, $|A_i|\neq|A_j|$] (współczynnik trudności $WT=2{,}59$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR=8$). Odpowiedź: $\max m=n-2$. Łatwo uzyskać oszacowanie $m\leqslant n-2$, trudniej wykonać konstrukcję, realizującą równość. W prawie wszystkich pracach (**R. M. Ayoush**, **T. Cieśla**, **J. Cisło**, **A. Jóźwik**, **T. Kochanek**, **P. Kumor**, **W. Nadara**) była to indukcja względem n, jak w rozwiązaniu firmowym. Z jednym wyjątkiem (**J. Olszewski**) – metoda zaskakująca oryginalnością: $A_1=\{1\}$, $A_{n-2}=\{3,4,\ldots,n\}$;

dla $1<k\leqslant\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor$: $\quad A_k=\{2i:1\leqslant i\leqslant k-1\}\cup\{2k-1\}$;

dla $\left\lfloor\frac{n-2}{2}\right\rfloor<k<n-2$: $\quad A_k=\{2i:1\leqslant i\leqslant n-2-k\}\cup\{j:2n-1-2k\leqslant j\leqslant n\}$

(aby zrozumieć, jak to działa, warto dla ilustracji wypisać sobie te zbiory dla kilku niewielkich wartości n). Wszystko się zgadza! (sprawdzenie zupełnie mechaniczne).

Zadanie **610** [$a_1=1$, $a_2=3$, $a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$; $k\geqslant 0\Rightarrow\forall\, n$: $a_n\not\equiv 0 \pmod{8k+5}$] ($WT=3{,}03$; $LPR=3$). Trzy dobre rozwiązania (**T. Kochanek**, **J. Olszewski**, **J. Cisło**) nie różniły się istotnie od rozwiązania firmowego (**M. Kieza**).

Zadanie **613** [Skończenie wiele okręgów na płaszczyźnie, każdy styczny zewnętrznie do pięciu innych] ($WT=2{,}66$; $LPR=10$ (13?)). Zadanie okazało się dobrze znane i łatwe do znalezienia w różnych publikacjach – z reguły z następującym rozwiązaniem: okręgi wpisane w ściany dwunastościanu foremnego leżą na jednej sferze; każdy jest styczny do pięciu innych; rzut stereograficzny z dowolnego punktu sfery, położonego „na zewnątrz" wszystkich tych dwunastu okręgów, przenosi je na płaszczyznę.

Takie właśnie rozwiązanie znalazło się we wszystkich pracach, ocenionych maksymalnie. Nieco niższe oceny (z powodu luk w uzasadnieniach) otrzymały prace, w których rozumowanie nie wychodziło poza płaszczyznę (lokalizacja środków okręgów w punktach przecięcia różnych stożkowych bądź też ciągła deformacja pewnej konfiguracji wyjściowej, aż do osiągnięcia konfiguracji wymaganej); uzyskiwano różne liczby okręgów, niekoniecznie dwanaście.

Mniej niż 12 się nie da; zaś liczby 5 z treści zadania nie można zastąpić większą; takim komentarzem, z uzasadnieniem, opatrzyli swoje prace **R. M. Ayoush** oraz **B. Romański**.

Zadanie **616** [$\forall\, x,y,z>0$: $\dfrac{(y+z)^2}{x^2+yz}+\dfrac{(z+x)^2}{y^2+zx}+\dfrac{(x+y)^2}{z^2+xy}\geqslant 6$] ($WT=3{,}36$; $LPR=5$). Tożsamość z rozwiązania firmowego znaleźli **Paweł Najman** oraz **Janusz Olszewski**, który podał jeszcze dwa inne dowody (!); oto ich skróty.

Drugi dowód: po przemnożeniu przez wspólny mianownik i przegrupowaniu dostajemy do udowodnienia, że $A_x+A_y+A_z\geqslant 0$, gdzie $A_x=(y-z)^2(y+z)(y+z-x)(x^2+yz)$ [A_y, A_z analogicznie]. Przyjmując $x\geqslant y\geqslant z$, mamy (nietrudno)

$x^2(y^2+xz)\geqslant y^2(x^2+yz),\ y^2(x-z)^2\geqslant x^2(y-z)^2,\ x+z\geqslant y+z,\ x+z-y\geqslant x-y-z;$

wymnożenie stronami daje (po skróceniu przez x^2y^2 i przekształceniu) nierówność $A_x+A_y\geqslant 0$; oczywiście $A_z\geqslant 0$; gotowe!

Trzeci dowód: stosując nierówność Cauchy'ego–Schwarza, mamy

$$\sum (x^2+yz)(y+z)^2 \cdot \sum \frac{(y+z)^2}{x^2+yz} \geqslant \left(\sum (y+z)^2\right)^2$$

(sumy (x,y,z)-cykliczne); wystarczy więc dowieść, że

$$\left(\sum (y+z)^2\right)^2 - 6\sum (x^2+yz)(y+z)^2 \geqslant 0 \tag{1}$$

– a to prawda, bo lewa strona (1) da się zapisać jako $6R+4S$, gdzie $R=\sum yz(y-z)^2 \geqslant 0$, $S=\sum x^2(x-y)(x-z) \geqslant 0$ (nierówność Schura).

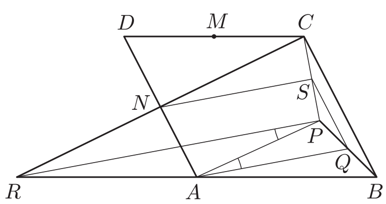
Bardzo oryginalne (niesymetryczne) przegrupowanie składników zadanej nierówności (po uprzednim pomnożeniu przez wspólny mianownik) wymyślił **Piotr Sobczak**, zapisując nierówność w postaci

$$p_1p_2p_3p_4 + q_1q_2q_3q_4 \geqslant 0, \tag{2}$$

gdzie $p_1 = 2x^2-y^2-z^2$, $p_2 = x-z$, $p_3 = x-y+z$, $p_4 = y^2+xz$, zaś q_i powstaje z p_i przez zamianę $x \leftrightarrow y$. Przyjmując $x \geqslant y \geqslant z$, mamy wszystkie $p_i \geqslant 0$; ponadto $q_2, q_4 \geqslant 0$. Jeżeli teraz $q_1q_3 \geqslant 0$, to (2) zachodzi. Pozostaje możliwość, że albo $q_1 < 0 < q_3$, albo $q_1 > 0 > q_3$. Nietrudno pokazać, że w pierwszym przypadku $p_1 \geqslant -q_1$, $p_2 \geqslant q_2$, $p_3p_4 \geqslant q_3q_4$, a w drugim $p_1p_4 \geqslant q_1q_4$, $p_2p_3 \geqslant -q_2q_3$; w każdym z tych przypadków wymnożenie napisanych nierówności prowadzi wprost do tezy (2).

Witold Bednarek także zauważył (korzystając z wypukłości funkcji $t \mapsto 1/t$), że wystarczy udowodnić nierówność (1). Zakładając, że $x \geqslant y \geqslant z$, i traktując y, z jako ustalone, wykazał, że lewa strona (1) jest niemalejącą funkcją zmiennej $x \in \langle y;\infty)$ (analiza pochodnych pierwszego i drugiego rzędu). Teza (1) zachodzi dla $x=y$, więc i dla wszystkich $x \geqslant y$.

Jeszcze jedno rozwiązanie z użyciem pochodnych, bardziej uciążliwe rachunkowo, ale bezbłędne, przedstawił **Zbigniew Sewartowski**.



Zadanie **618** [Równoległobok $ABCD$; punkt P wewnątrz; M, N – środki CD, AD; $|MP| = |MA|$; $|NP| = |NC|$; Q – środek $BP \Rightarrow |\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle PCQ|$] ($WT = 3{,}47$; $LPR = 3$). Cztery świetne dowody, zgrabniejsze niż firmowy (nie kłóci się to z równością $LPR = 3$, bo dwa dowody są w pracy jednego uczestnika – zgadnijcie, kogo).

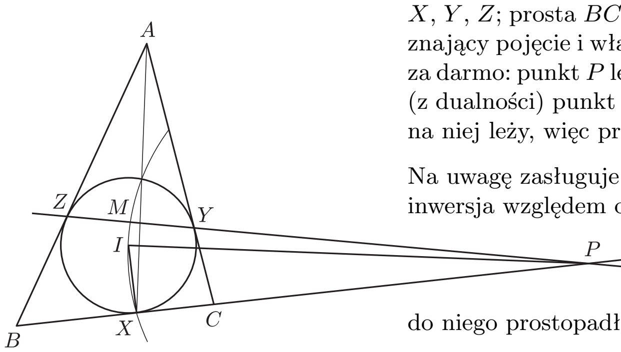
Jerzy Cisło i **Janusz Olszewski** rozumują tak: proste AB i CN przecinają się w punkcie R; kąt CPR jest prosty (oparty na średnicy okręgu o środku N). Punkt A jest środkiem BR, więc $AQ \| RP$; stąd $|\sphericalangle PAQ| = |\sphericalangle APR| = |\sphericalangle APC| - 90^\circ$. Analogicznie $|\sphericalangle PCQ| = |\sphericalangle APC| - 90^\circ$ (podobne to trochę do firmowego, ale jednak prostsze).

Marek Spychała i **Janusz Olszewski** (drugi sposób!) wprowadzają środek S odcinka CP, powstaje równoległobok $ANSQ$. Odcinek CP jest prostopadły do swojej symetralnej NS, więc i do prostej AQ. Analogicznie $AP \perp CQ$. Zatem P to ortocentrum trójkąta ACQ i teza gotowa.

Zadanie **619** [Szachownica $n \times n$ pokryta płytkami 2×2; liczba płytek $> 2(n^2-n)/3$ $\Rightarrow$ można usunąć jedną płytkę, szachownica nadal będzie pokryta] ($WT = 2{,}65$; $LPR = 6$). Dobre rozwiązania (**R. M. Ayoush**, **J. Cisło**, **J. Fiett**, **T. Kochanek**, **M. Miodek**, **J. Olszewski**) w większości nie odbiegały od firmowego; jedno lub dwa były bardziej zawiłe.

J. Olszewski wskazał ponadto możliwość wzmocnienia wyniku (przez bardziej staranne zliczanie krotności pokrycia pól szachownicy): dla $n \geqslant 7$ teza zachodzi już przy założeniu, że liczba płytek $> 4n^2/7$.

Zadanie **621** [$\triangle ABC$; okrąg wpisany (środek I) styczny do BC, CA, AB w punktach X, Y, Z; prosta BC przecina YZ w $P \Rightarrow IP \perp AX$] ($WT = 3{,}00$; $LPR = 8$). Uczestnicy znający pojęcie i własności biegunowej (**R. M. Ayoush**, **J. Garnek**) mieli zadanie wręcz za darmo: punkt P leży na biegunowej (YZ) punktu A względem okręgu wpisanego, zatem (z dualności) punkt A leży na biegunowej punktu P względem tego okręgu. Punkt X też na niej leży, więc prosta AX jest ową biegunową – oczywiście prostopadłą do IP.



Na uwagę zasługuje też eleganckie rozwiązanie, które podał **Tomasz Kochanek**: inwersja względem okręgu wpisanego przekształca prostą AX na pewien okrąg, przechodzący przez punkt I (środek inwersji) i przez punkty X oraz M – środek odcinka YZ (obraz punktu A). Kąty IXP, IMP są proste, zatem odcinek IP jest średnicą tego okręgu – jest więc do niego prostopadły. Inwersja zachowuje prostopadłość; stąd $IP \perp AX$.

Inne dobre rozwiązania: **J. Cisło**, **J. Olszewski**, **T. Wietecha**, **P. Sobczak**, **P. Najman**.