Czy $W(x) = 0$?

Jakub RADOSZEWSKI

Poszukiwanie pierwiastków wielomianu jest jednym z podstawowych zagadnień rozważanych we wszystkich naukach ścisłych. W tym artykule zajmiemy się czymś znacznie prostszym: sprawdzaniem, czy dana liczba jest pierwiastkiem zadanego wielomianu. Mając dany wielomian $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ i konkretną wartość parametru x, chcemy więc sprawdzić, czy $W(x) = 0$. Można by spytać, czy nie wystarczy w tym celu podstawić wartość x i na tym skończyć? Rzeczywiście, jeśli mamy do czynienia z „nieskomplikowanym" wielomianem (cokolwiek by to miało znaczyć) i „sensownym" parametrem x, to problem jest trywialny. Może się jednak okazać, że nasze dane nie są „nieskomplikowane i sensowne", ale za to możemy wesprzeć się domowym komputerem…

Przede wszystkim należy sprecyzować, jakimi *liczbami* zamierzamy się zajmować. Aha, a więc to tutaj tkwi haczyk! Podejrzliwy Czytelnik zapewne domyśla się już, że za moment wkroczymy w mroczny świat komputerowych reprezentacji liczb rzeczywistych, z przybliżeniami, cechami, mantysami i wszędobylskimi epsilonami. Faktycznie, komputerowe sprawdzenie równości $W(x) = 0$ w liczbach rzeczywistych nastręcza pewnych trudności i jest istotnym zagadnieniem w dziedzinie metod numerycznych. My jednak nie będziemy się w to tutaj wgłębiać i założymy, że mamy do czynienia wyłącznie z liczbami całkowitymi. Czy w takim razie problem zawiera w sobie jeszcze jakąś trudność? Owszem.

Otóż nieprzyjemne jest to, że przy obliczaniu $W(x)$ szybko zaczynamy mieć do czynienia z bardzo dużymi liczbami. I to nawet wtedy, gdy współczynniki a_i są niewielkie, co dla informatyka znaczy, że co do wartości bezwzględnej nie przekraczają dwóch miliardów (orientacyjne ograniczenie standardowego typu całkowitego 32-bitowego ze znakiem; faktycznie jest to 2^{31}, czyli trochę więcej). Rzeczywiście, bez trudu widzimy, że jednym z pierwiastków wielomianu:

$$x^{1000} - 9x^{999} - 9x^{998} + \ldots - 9x - 10$$

jest $x = 10$, ale jeśli chcielibyśmy to sprawdzić, wykonując proste podstawienie, musielibyśmy operować na liczbach zawierających 1000 cyfr. Nawet osoba niezaznajomiona z komputerem łatwo zauważy, że obliczenia na takich długaśnych liczbach muszą być w jakimś sensie trudniejsze. Tak jest w istocie: wykonywanie operacji na dużych liczbach jest powolne, a do tego bywa wyjątkowo niewygodne, jeśli akurat natrafimy na system czy język programowania, który dostarcza implementacje działań jedynie na wbudowanych typach całkowitych, co zazwyczaj oznacza liczby 64-bitowe (ze znakiem), czyli mniejsze co do wartości bezwzględnej niż 2^{63}.

No dobrze, ale my chcemy tylko sprawdzić, czy $W(x) = 0$, a niekoniecznie od razu obliczyć dokładną wartość $W(x)$ – to przecież musi być prostsze! I rzeczywiście: poniżej opisujemy krótką i elegancką metodę rozwiązującą ten problem.

Załóżmy, że $x \neq 0$ – z przypadkiem $x = 0$ łatwo sobie poradzić, sprawdzając, czy $a_0 = 0$. Chcemy stwierdzić, czy:

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0,$$

równoważnie czy:

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x = -a_0.$$

Lewa strona jest podzielna przez x, a zatem prawa też musi dzielić się przez x. Otrzymujemy pierwszy warunek konieczny na to, żeby x było pierwiastkiem W:

(1) $$a_0 \bmod x = 0.$$

Jeśli on zachodzi, możemy całą równość podzielić przez x, otrzymując:

$$a_n x^{n-1} + \ldots + a_2 x + a_1 = -\frac{a_0}{x}.$$

Ta sytuacja jest podobna do poprzedniej. Przerzucamy a_1 na drugą stronę:

$$a_n x^{n-1} + \ldots + a_2 x = -\frac{a_0}{x} - a_1$$

i otrzymujemy drugi warunek konieczny:

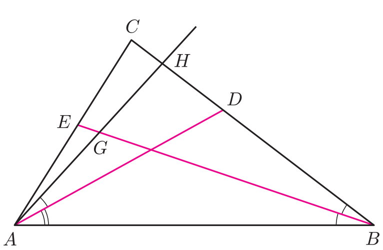
(2) $$\left(\frac{a_0}{x} + a_1\right) \bmod x = 0.$$

Rozwiązanie zadania F 805.
Niech początkowy promień nawiniętej taśmy będzie równy $4r$. Zatem po dwukrotnym zmniejszeniu się tego promienia powierzchnia nawiniętej taśmy zmniejszy się o wielkość $S = \pi(16r^2 - 4r^2) = 12\pi r^2$. Przy odsłuchiwaniu zapisu prędkość liniowa przesuwu taśmy v jest stała, zatem długość nawiniętej taśmy to $l_1 = vt_1$. Z drugiej strony jest ona równa $S/d = 12\pi r^2/d$, gdzie d jest grubością taśmy. Z porównania tych wzorów wynika, że $12\pi r^2 = vt_1 d$.

Gdy promień nawiniętej taśmy zmniejszy się znowu dwa razy, pole powierzchni nawinięcia zmniejszy się o wielkość $S_1 = \pi(4r^2 - r^2) = 3\pi r^2$, stąd $3\pi r^2/d = vt_2$. Ostatecznie:

$$t_2 = t_1/4 = 5 \text{ minut.}$$

Rozwiązanie zadania M 1339.
Załóżmy, że w trójkącie ABC mamy $\sphericalangle A > \sphericalangle B$. Odłóżmy kąt $\frac{1}{2}\sphericalangle B$ na dwusiecznej AD jako na ramieniu, jak na rysunku.



Z podobieństwa trójkątów AHD i BHG mamy $\frac{BG}{AD} = \frac{BH}{AH}$. Ale w trójkącie ABH bok BH leży naprzeciw większego kąta niż bok AH, więc $BH > AH$. Stąd i z uzyskanej proporcji otrzymujemy $BG > AD$. Tym bardziej więc $BE > AD$, co mieliśmy udowodnić.

Inne rozwiązanie można znaleźć w *Delcie* 1/2010.

Rozwiązanie zadania M 1341.

Wykonujemy następujące przekształcenia:

$$(a+b+c+d)^2 - 8(ac+bd) =$$
$$= a^2 + 2a(b+c+d) +$$
$$+ (b+c+d)^2 - 8ac - 8bd =$$
$$= a^2 + 2a(b-3c+d) + (b-3c+d)^2 +$$
$$+ (b+c+d)^2 - (b-3c+d)^2 - 8bd =$$
$$= (a+b-3c+d)^2 +$$
$$+ (2(b-c+d) \cdot 4c - 8bd).$$

Wystarczy wykazać, że drugi składnik jest dodatni. Ale

$$(b-c+d)\cdot c - bd =$$
$$= (b-c)\cdot c + d\cdot(c-b) =$$
$$= (c-b)(d-c) > 0.$$

Następnie znów dzielimy obie strony równości przez x i kontynuujemy to postępowanie, aż po lewej stronie pozostanie samo a_n. Po drodze otrzymamy kolejne warunki konieczne na to, żeby x było pierwiastkiem wielomianu W, na przykład trzeci z nich będzie postaci:

$$\left(\frac{a_0}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_2\right) \bmod x = 0. \tag{3}$$

Na końcu zaś wystarczy sprawdzić, czy:

$$\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n = 0. \tag{4}$$

W ten sposób uzyskujemy następujący pseudokod, w którym sprawdzamy kolejno warunki (1), (2), (3) itd., a na końcu (4).

```
w := a0;
if x ≠ 0 then
   for i := 1 to n do
      if w mod x ≠ 0 then return false;
      w := w/x + ai;
if w ≠ 0 then return false
else return true;
```

Zauważmy, że wartość zmiennej w nigdy nie przekroczy sumy wartości bezwzględnych liczb a_i, więc nie będziemy mieć do czynienia z żadnymi dużymi liczbami. Czyli pełny sukces!

Na zakończenie warto dodać, że podany problem można także rozwiązać za pomocą tak zwanego schematu Hornera, w którym wykorzystujemy następujące przedstawienie:

$$W(x) = ((\ldots((a_n \cdot x + a_{n-1})\cdot x + a_{n-2})\ldots)\cdot x + a_1)\cdot x + a_0.$$

Wystarczy mianowicie próbować obliczyć $W(x)$ zgodnie z tym schematem, od lewej do prawej – na przemian mnożymy przez x i dodajemy a_i – przy czym obliczenia przerywamy, jeśli aktualna wartość staje się zbyt duża. Wiemy wówczas, że na pewno wynikiem nie będzie zero. A to, jaka jest ta graniczna wartość, przy której możemy od razu udzielić odpowiedzi negatywnej, pozostawiamy do rozstrzygnięcia Czytelnikowi.

Prosto z nieba: Nowa nadzieja

Rozpoczęta w 2009 r., sponsorowana przez NASA misja kosmiczna *Kepler* ma na celu oszacowanie liczby zdatnych do zamieszkania planet, ich parametrów oraz właściwości układów planetarnych, w których się znajdują. Dotychczas zarejestrowano ponad tysiąc kandydatów na planety, obecnie skrupulatnie weryfikowanych podczas dodatkowych obserwacji. Wśród wielu interesujących odkryć jedno zasługuje na szczególną uwagę: jest to planeta znajdująca się w układzie podwójnym. Układ ów tworzą gwiazdy nieco chłodniejsze i nieco mniej masywne od Słońca, a znajduje się on około 200 lat świetlnych od naszego układu planetarnego (w gwiazdozbiorze Łabędzia). Planeta została oznaczona kryptonimem Kepler-16b [1], nieformalnie natomiast astronomowie ochrzcili ją zdecydowanie bardziej romantyczną nazwą Tatooine (znaną z *Gwiezdnych wojen* George'a Lucasa planetą dzieciństwa Luke'a Skywalkera). W odróżnieniu od filmowej Tatooine glob odkryty przez zespół Keplera jest zimnym gazowym gigantem. Nie spodziewamy się tam zatem odnaleźć przejawów życia podobnego do ziemskiego głównie z powodu panującej tam zdecydowanie za niskiej temperatury – Kepler-16b znajduje się poza obszarem sprzyjającym powstaniu życia (tzw. „ekosferą").

Doniesienia o odkryciu planety o dwóch słońcach zdarzały się już wcześniej, ale nigdy nie znalazły potwierdzenia podczas bardziej wnikliwej analizy. Obserwacje *Keplera* są jednak tak wysokiej jakości, że ich wiarygodność praktycznie nie jest kwestionowana. Możliwość istnienia planety typu Kepler-16b była od dawna przedmiotem rozważań teoretyków, przewidujących różne niestandardowe sposoby powstawania układów planetarnych. Biorąc pod uwagę fakt, że większość gwiazd w Galaktyce znajduje się w układach podwójnych, możemy spodziewać się większej liczby takich planet, niż to wynika z oszacowań wykorzystujących obserwacje samotnych gwiazd. Oznacza to także, że wzrosło prawdopodobieństwo znalezienia planety o podobnych do Ziemi parametrach. Czas pokaże (trzymamy kciuki!), czy wśród kolejnych planet *Keplera* znajdzie się także druga Ziemia.

Michał BEJGER

[1] http://kepler.nasa.gov/Mission/discoveries/kepler16b