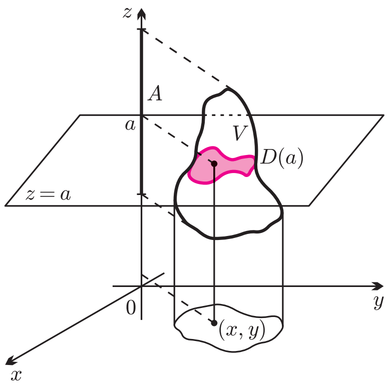
Zasada Cavalieriego

Jarosław GÓRNICKI
Katedra Matematyki, Politechnika Rzeszowska



Rys. 1

Zasada Cavalieriego jest prawdziwa również wtedy, gdy przekroje brył płaszczyznami nie są spójne. Mogą się składać z wielu części, ale muszą być na tyle „porządne", żebyśmy umieli obliczyć ich pole.

Rozpatrzmy bryłę $V \subset \mathbb{R}^3$ w położeniu normalnym względem osi OZ. To oznacza, że na osi OZ istnieje taki przedział A, że płaszczyzna zadana równaniem $z = a$ przecina bryłę V wtedy i tylko wtedy, gdy $a \in A$. Załóżmy ponadto, że każdy taki przekrój ma pole $D(z)$ (rysunek 1). Wówczas objętość bryły V wyrażamy wzorem, który (przekształcany zgodnie z twierdzeniem Fubiniego) przyjmuje postać

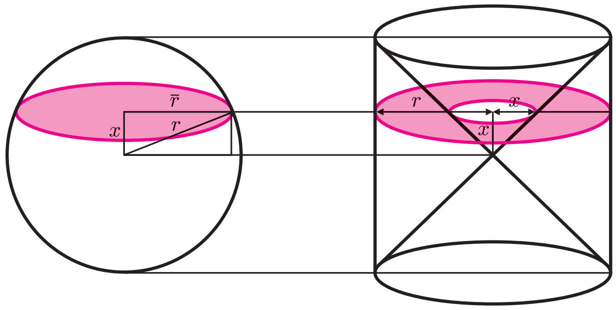
$$\mu_3(V) = \iiint_V 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_A \left(\iint_{D(z)} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}z =$$

$$= \int_A \mu_2(D(z))\,\mathrm{d}z.$$

Z końcowej postaci wzoru łatwo wywnioskować, że objętość bryły V zależy nie od kształtu powierzchni bryły, lecz od pola jej przekroju płaszczyznami $z = a$ dla $a \in A$. Tę myśl wyraża dokładnie **zasada Cavalieriego** (1635 r.): *jeśli dwie bryły w przecięciu z każdą płaszczyzną równoległą do wybranej dają przekrój o tym samym polu, to ich objętości są równe.*

Dzięki temu twierdzeniu obliczanie objętości bryły można czasem uprościć, odwołując się do znanych wyników – objętości pewnych szczególnych brył. Wymaga to pomysłowości, ale pozwala ominąć rachunek całkowy. Ideę tę zawdzięczamy Archimedesowi, który wykorzystał ją do obliczenia objętości kuli. Pokażemy pięć przykładów takiego zastosowania zasady Cavalieriego.

Przykład 1 (Archimedes, III w. p.n.e.)
Objętość kuli jest równa objętości opisanego na niej walca z wyciętymi stożkami (jak na rysunku 2),

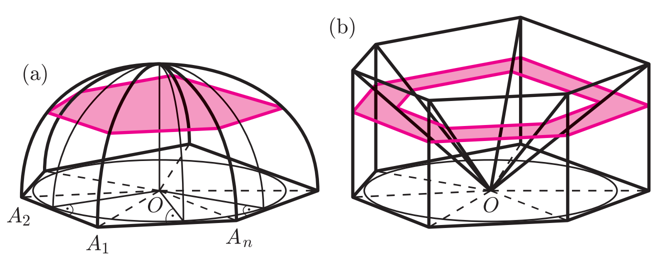


Rys. 2

gdyż, jak łatwo obliczyć, pola zaznaczonych kolorem przekrojów są równe. Zatem objętość kuli o promieniu r to

$$V_k = \pi r^2 \cdot 2r - 2 \cdot \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

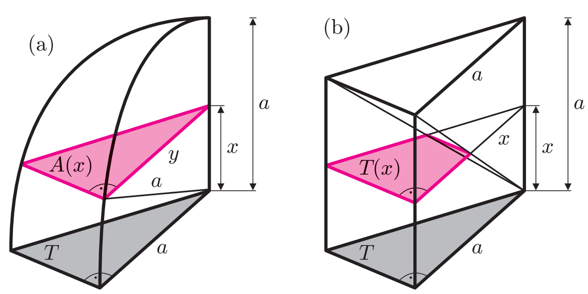
Przykład 2 (T.M. Apostol, M.A. Mnasakanian, 2004)
Podstawą *n-kopuły opisanej na półsferze* o promieniu $a > 0$ i środku O jest n-kąt $A_1 A_2 \ldots A_n$ opisany na kole wielkim półsfery. Ścianami są fragmenty powierzchni bocznej walca o promieniu a, rozpięte nad trójkątami $\triangle A_i A_{i+1} O$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, gdzie przyjmujemy, że $A_{n+1} = A_1$ (patrz rysunek 3(a)).



Rys. 3

Aby obliczyć objętość takiej n-kopuły, wykorzystamy pomysł Archimedesa. Na n-kopule opisujemy graniastosłup, z którego wycinamy ostrosłup o wierzchołku O i podstawie będącej górną podstawą graniastosłupa, jak na rysunku 3(b).

Wykażemy, że przekroje obu brył płaszczyzną równoległą do podstawy na wysokości $0 \leqslant x \leqslant a$, zaznaczone kolorem na rysunku, mają równe pola. W tym celu rozpatrzmy odpowiadające sobie części kopuły i wielościanu, jak na rysunku 4.



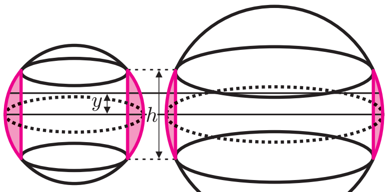
Rys. 4

Najpierw popatrzmy na rysunek 4(a): zacieniowane trójkąty są podobne, a skala podobieństwa (przy oznaczeniach z rysunku) to $\frac{y}{a}$. Ponieważ $x^2 + y^2 = a^2$, więc pole $A(x)$ jest równe $\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)T$.

Na rysunku 4(b) mały trójkąt otrzymany przez wyrzucenie kolorowego trapezu z przekroju na wysokości x jest podobny do trójkąta T, a skala podobieństwa to $\frac{x}{a}$. Pole trapezu $T(x)$ jest równe $\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)T$, czyli faktycznie $A(x) = T(x)$.

Wobec tego, na podstawie zasady Cavalieriego

$$\text{objętość } n\text{-kopuły} = \frac{2}{3} \cdot (\text{pole opisanego } n\text{-kąta}) \cdot a.$$



Rys. 5

Przykład 3 (Seki K-owa, XVII w.)
Objętość kulistego pierścienia o szerokości h (czyli kuli z wyciętym ze środka walcem, jak na rysunku 5) nie zależy od promienia kuli – jest taka sama dla kul dużych i małych!

Rzeczywiście, gdy przecinamy taki pierścień, wycięty z kuli o promieniu R płaszczyzną odległą od środka kuli o y, gdzie $0 \leqslant y \leqslant \frac{h}{2}$, to (przy oznaczeniach z rysunku) pole przecięcia jest równe

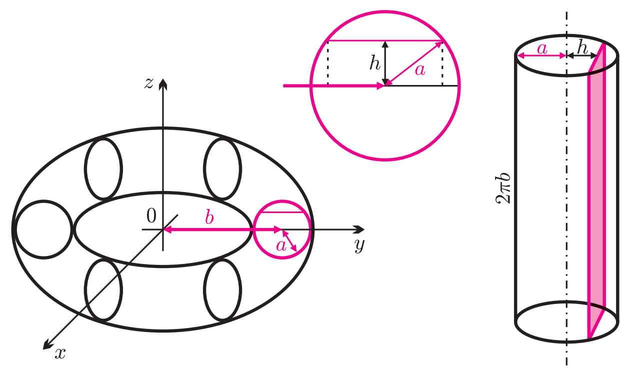
$$\pi(R^2 - y^2) - \pi\left(R^2 - \frac{h^2}{4}\right) = \pi\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Zatem pola przekrojów nie zależą od promienia kuli, więc na mocy zasady Cavalieriego objętość także nie zależy (a jeśli ktoś lubi całkować, to obliczy, że jest równa $\frac{\pi}{6}h^3$). Wynik ten jest rozwiązaniem zagadki Martina Gardnera, podanej np. w *Delcie* 1/2011 pod tytułem *Kula i dziura*.

Przykład 4
Gdy torus z rysunku 6 przetniemy płaszczyzną $z = h$, gdzie $-a \leqslant h \leqslant a$, to pole otrzymanego pierścienia kołowego będzie równe

$$4\pi b\sqrt{a^2 - h^2} = 2\sqrt{a^2 - h^2} \cdot 2\pi b.$$

Ponieważ ostatni iloczyn to pole przekroju walca o promieniu podstawy a i wysokości $2\pi b$ płaszczyzną odległą o h od osi walca (rys. 6), więc objętość torusa jest równa objętości tego walca, czyli $2\pi^2 a^2 b$.



Rys. 6

Przykład 5 (H. Eves, 1991)
Istnieje wielościan, którego przecięcie z każdą płaszczyzną równoległą do danej ma takie samo pole jak przecięcie tej płaszczyzny z kulą.

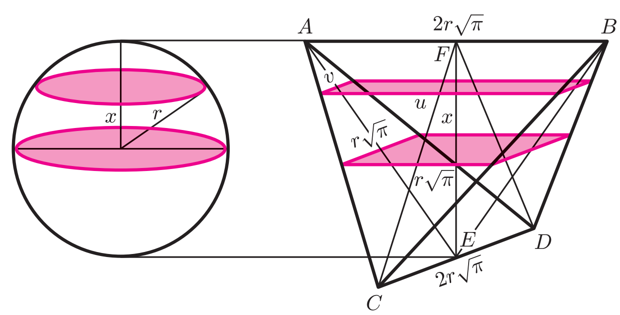
Ten warunek spełnia czworościan foremny o boku $2r\sqrt{\pi}$, gdzie r jest promieniem kuli. Oczywiście, trzeba go odpowiednio ustawić, co ilustruje rysunek 7. Przy oznaczeniach z rysunku, na mocy twierdzenia Talesa zastosowanego do trójkąta ABE, a następnie do trójkąta CDF, otrzymujemy

$$\frac{u}{r\sqrt{\pi}} = \frac{r+x}{r}, \qquad \frac{v}{r\sqrt{\pi}} = \frac{r-x}{r},$$

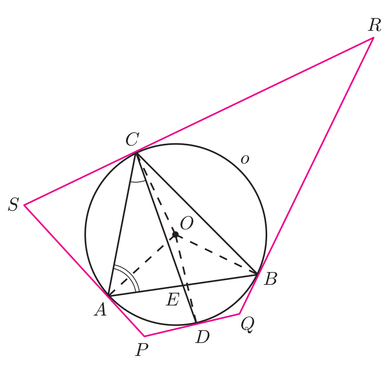
a stąd

$$u \cdot v = \pi(r^2 - x^2)$$

i już!



Rys. 7



Rozwiązanie zadania M 1336.
Oznaczmy przez O środek okręgu o, przez E zaś środek odcinka AB. Na czworokącie $PQRS$ można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle SPQ + \sphericalangle SRQ = 180°$. Rozważając czworokąty $APDO$ i $BRCO$, widzimy, że jest to równoważne temu, iż $180° = \sphericalangle AOD + \sphericalangle COB$. Ale $\sphericalangle AOD = 2\sphericalangle ACE$, $\sphericalangle COB = 2\sphericalangle CAE$, więc żądana równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt AEC ma kąt prosty przy wierzchołku E. Wobec definicji punktu E jest to prawda wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąt ABC jest równoramienny o podstawie AB.

Rozwiązanie zadania M 1338.
Odpowiedź: $k = 1007$.

Najpierw wykażemy, że liczba $k = 1007$ ma żądaną własność. Podzielmy nasz zbiór $\{1, 2, \ldots, 2012\}$ na dwuelementowe podzbiory

$$\{1, 670\}, \{2, 669\}, \ldots, \{335, 336\},$$
$$\{671, 1342\}, \{672, 1343\}, \ldots, \{1341, 2012\}.$$

Jeśli wybraliśmy 1007-elementowy podzbiór, to któreś dwa jego elementy tworzą jeden z powyższych zbiorów (ich jest 1006). Zatem suma lub różnica tych elementów wynosi 671.

Teraz wykażemy, że liczby $k < 1007$ nie spełniają podanego warunku. Wystarczy to zrobić dla $k = 1006$. Rozważmy zbiór $\{2, 4, 6, \ldots, 2012\}$. Sumy i różnice jego elementów są liczbami parzystymi, żadna więc nie może wynosić 671.