O podatku Belki

*Jerzy ZABCZYK**

*Instytut Matematyczny PAN

Osoby osiągające dochody muszą płacić podatki. Podatki od pensji są najczęściej obliczane i odprowadzane przez instytucje, w których pracujemy. Podatki od dochodów uzyskiwanych na kontach bankowych są odprowadzane, w wysokości 19%, przez banki. Jest to tak zwany podatek Belki. Przy obliczaniu tego podatku dwukrotnie dokonuje się zaokrąglenia: przy obliczaniu dochodu (podstawy opodatkowania) i przy obliczaniu samego podatku. Bankowcy zauważyli, że jeżeli dochód nie przekracza kwoty $d = 2{,}49$ zł, to kwota podatku jest równa 0. Mianowicie, kwota 2,49 po pierwszym zaokrągleniu zamienia się na 2, a $\frac{19}{100}$ tej kwoty to 0,38 i drugie zaokrąglenie daje 0. W związku z tym niektóre banki zaproponowały lokaty na K dni z oprocentowaniem α w skali rocznej, dla których dochody są naliczane każdego dnia. Powstaje więc pytanie: jaka jest maksymalna kwota L, którą można ulokować na koncie, by bank nie odprowadził od niej żadnego podatku? Dochody każdego dnia są obliczane zgodnie z procentem składanym r, spełniającym równanie

$$(1+r)^N = 1+\alpha,$$

gdzie $N = 365$ to liczba dni w roku. Maksymalna lokata L dana jest równaniem

$$L(1+r)^{K-1}r = d. \tag{1}$$

Przedostatniego dnia kwota do opodatkowania wynosi $L(1+r)^{K-1}$, a dochód od niej jest równy $L(1+r)^{K-1}r$. Stąd wzór.

Do uzyskania konkretnych informacji, jakie kwoty wchodzą tu w grę i jak duży może być nieopodatkowany dochód, proponujemy rozwiązanie kilku zadań.

Zadanie 1. Udowodnić, że

$$\frac{\ln(1+\alpha)}{N} < r < \frac{\alpha}{N},$$

gdzie ln to logarytm liczony przy podstawie e.

Wskazówka. Jeżeli $x > 0$, to $e^x > 1 + x$.

Aby oszacować błąd, który powstaje w obliczeniach przy zamianie r na $\frac{\alpha}{N}$, warto rozwiązać

Zadanie 2. Dla $\alpha > 0$

$$0 < \alpha - \ln(1+\alpha) < \frac{\alpha^2}{2}.$$

Wskazówka. Pochodna ψ' funkcji $\psi(\alpha) = \alpha - \ln(1+\alpha)$, $\alpha > 0$, wynosi $\frac{\alpha}{1+\alpha}$, $\alpha > 0$.

Na przykład, gdy $\alpha = 0{,}5$, to błąd popełniany przy zamianie liczby $\ln(1+\alpha)$ na liczbę α jest mniejszy niż 0,000125. Zamieniając w równaniu (1) r na $\frac{\alpha}{N}$, otrzymujemy, że od lokat w wysokości

$$L_b = \frac{d}{(1+r)^{K-1}\alpha}N \tag{2}$$

nie będzie się płacić podatku. Jest to lokata „bezpieczna", nieznacznie różniąca się od lokaty maksymalnej. Wzór (2) łatwo wykorzystać do obliczeń. Banki proponują 3- lub 4-miesięczne lokaty unikające podatku Belki i wygodnie jest wprowadzić do wzoru (3) liczbę $f = \frac{K-1}{N}$, mierzącą część roku, na którą lokata jest zakładana. Możemy wtedy wyeliminować r ze wzoru (2).

Zadanie 3. Wykazać, że

$$L_b = \frac{d}{(1+\alpha)^f\alpha}N. \tag{3}$$

Zadanie 4. Obliczyć, że jeśli

1) $f = \frac{1}{4}$ (lokata na 3 miesiące) przy oprocentowaniu $\alpha = 0{,}045$, to (w przybliżeniu)

$$L_b = 19\,970.$$

2) $f = \frac{1}{3}$ (lokata na 4 miesiące) i $\alpha = 0{,}055$, to (w przybliżeniu)

$$L_b = 16\,220.$$

Zadanie 5. Wykazać, że dochód z maksymalnej lokaty L wynosi: $L((1+r)^K - 1)$ i nieznacznie przekracza liczbę

$$D = L((1+\alpha)^f - 1).$$

Zadanie 6 – kontynuacja Zadania 4. Obliczyć, że w przypadku 1) $D = 221$, a w przypadku 2) $D = 303$.

Gdyby podatek od dochodu odprowadzała osoba wykupująca lokatę, to po okresie odpowiednio 3 lub 4 miesięcy musiałaby odprowadzić odpowiednio 42 lub 58 złotych. Ponieważ w trakcie trwania lokaty nie mogłaby ona pobrać zgromadzonych środków, więc, z jej perspektywy, wzbogaca się ona dopiero po 3 lub, odpowiednio, po 4 miesiącach. Zabieg omijania podatku Belki rodzi więc istotne problemy prawne i moralne i nie wszystkie banki zdecydowały się, by antybelkowe lokaty oferować. Omijanie podatku trwa już kilka lat. Zaokrąglanie kwot do pełnych złotówek w górę lub zaniechanie zaokrągleń zlikwidowałoby tę możliwość.

Na zakończenie zauważamy, że gdyby bank naliczał odsetki nie każdego dnia, ale co godzinę, to we wzorze (3) liczbę N należałoby zamienić na $24N$ i „bezpieczna" wysokość lokaty wzrosłaby 24-krotnie, podobnie jak wysokość nieopodatkowanego dochodu. Gdy $N \to +\infty$, to i $L_b \to +\infty$.