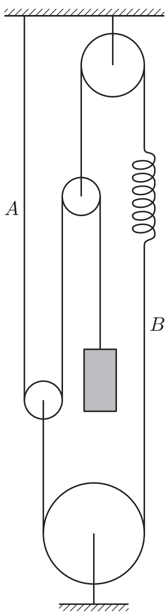
Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

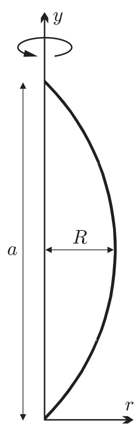
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2012



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 530, 531

Redaguje Jerzy B. BROJAN

530. Ciężarek o masie m wisi na nici A przełożonej przez 2 bloki ruchome (rys. 1). Osie tych bloków są połączone nicią B przełożoną przez 2 bloki nieruchome, a w tej nici zamontowana jest sprężynka o stałej sprężystości k. Obliczyć okres pionowych drgań ciężarka. Masy bloków pominąć.

531. Gdy transformator był podłączony uzwojeniem pierwotnym do napięcia przemiennego U_1, a obwód wtórny był otwarty, napięcie na uzwojeniu wtórnym było równe U_2, a natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym I_1 (wszystkie podane wielkości są wartościami skutecznymi). Zamknięto obwód wtórny, dołączając do niego: a) opornik, b) zwojnicę bezoporową, c) kondensator. Ile w każdym z tych przypadków wyniesie natężenie prądu w uzwojeniu pierwotnym, jeśli we wtórnym popłynie prąd o natężeniu I_2? Oba napięcia U_1 i U_2 nie zmieniły wartości, a straty energii w transformatorze (jego nagrzewanie się) można pominąć.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2011

Przypominamy treść zadań:

522. Linka o długości $l = 1{,}5$ m i masie $m = 0{,}2$ kg (jednorodnie rozłożonej) jest zamocowana końcami w dwóch punktach odległych o $a = 1$ m (rys. 2). Linka obraca się wokół osi przechodzącej przez punkty zamocowania z prędkością kątową $\omega = 100$ rad/s i względem tego obracającego się układu odniesienia pozostaje nieruchoma. Pomijając efekty siły ciężkości, obliczyć numerycznie odległość R środkowego punktu linki od osi obrotu.

523. Dwie cienkie współosiowe soczewki o ogniskowych f_1 i f_2 są odległe o d i wykonane z tego samego szkła. Jaki warunek muszą spełniać podane parametry, aby ogniskowa zespołu nie zależała od długości fali (aby układ był achromatyczny)? Zmiany współczynnika załamania są niewielkie.

Ogólnie definiuje się ogniskową w sposób następujący: gdy na układ pada promień równoległy do osi i odległy od niej o niewielki odcinek h, a wychodząc z układu przecina oś pod kątem α, to ogniskowa wynosi $f = h/\alpha$.

522. Niech y będzie współrzędną wzdłuż osi obrotu, natomiast r – współrzędną wzdłuż osi prostopadłej. Składowa F_y siły napięcia linki jest stała, natomiast przyrost składowej F_r równoważy siłę odśrodkową działającą na fragment linki o długości $\mathrm{d}s$ i masie $\mathrm{d}m$:

$$\mathrm{d}F_r = -\omega^2 r\mathrm{d}m = -\omega^2 r\frac{m}{l}\mathrm{d}s = -\frac{m\omega^2}{l}r\sqrt{1+(\mathrm{d}r/\mathrm{d}y)^2}.$$

Znak minus w powyższym równaniu odpowiada $\mathrm{d}r > 0$, $\mathrm{d}y > 0$. Kierunek siły napięcia jest styczny do linki, czyli $\frac{F_r}{F_y} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}$, a stąd

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{m\omega^2}{lF_y}r\sqrt{1+(\mathrm{d}r/\mathrm{d}y)^2} = -Ar\sqrt{1+(\mathrm{d}r/\mathrm{d}y)^2}.$$

Numeryczne całkowanie tego równania rozpoczynamy od $y = r = 0$ i dowolnie wybranych wartości A oraz $\mathrm{d}r/\mathrm{d}y$. Wartości te należy dobrać tak, aby w punkcie $y = a/2$ osiągnąć $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y} = 0$ oraz długość linki równą $l/2$. Okazuje się, że przy danych a i l właściwymi wyborami są $A = 7{,}940\ \mathrm{m}^{-2}$ (faktycznie wyznaczamy w ten sposób F_y; wartości m i ω nie wpływają na kształt linki) oraz $\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}\right)_0 = 1{,}796$. Maksymalną wartością r jest $R = 0{,}516$ m. Dla porównania, dla krzywej łańcuchowej (cosinusa hiperbolicznego) byłoby $R = 0{,}503$ m.

523. Obliczenie ogniskowej F układu jest dość standardowe i nie będziemy go powtarzać. Otrzymuje się

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}.$$

Podstawiamy $\frac{1}{f_i}$ w postaci $\frac{1}{f_i} = (n-1)A_i$, gdzie $i = 1$ lub 2, A_i nie zależy od n. Przy niewielkiej zmianie Δn zmiana zdolności skupiającej układu $1/F$ wynosi

$$\Delta\left(\frac{1}{F}\right) = \Delta n(A_1 + A_2 - 2d(n-1)A_1A_2).$$

Proste przekształcenie prowadzi do wniosku, że zmiana ta jest równa zeru, gdy $f_1 + f_2 = 2d$.

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2012

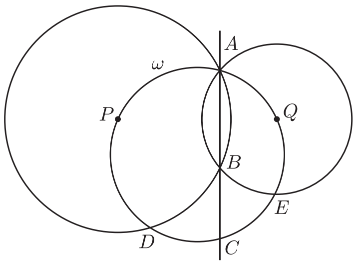
Zadania z matematyki nr 633, 634

Redaguje Marcin E. KUCZMA

633. Każdy punkt płaszczyzny został pokolorowany na czerwono lub zielono. Dany jest trójkąt ABC. Dowieść, że istnieje trójkąt przystający do ABC o wszystkich wierzchołkach zielonych lub istnieje odcinek długości jednostkowej o obu końcach czerwonych.

634. Niech S będzie skończonym zbiorem liczb całkowitych. Wykazać, że istnieje wielomian stopnia pierwszego, o współczynnikach całkowitych, którego wartości w punktach zbioru S są parami względnie pierwsze.

Zadanie 634 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.



Rozwiązania zadań z numeru 9/2011

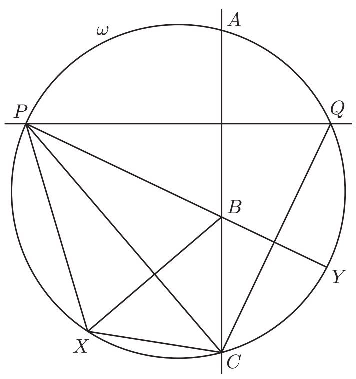
Przypominamy treść zadań:

625. Okręgi o środkach P i Q przecinają się w punktach A i B; promienie PA i QA nie są prostopadłe. Okrąg opisany na trójkącie APQ przecina te dwa okręgi w punktach D i E (różnych od A) oraz przecina prostą AB w punkcie C (różnym od A). Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie BDE ma środek w punkcie C.

626. Dana jest liczba $a > 0$. Określamy ciągi (x_n) oraz (y_n):

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \quad \text{dla } n \geqslant 1; \qquad y_n = x_1^{1/2} x_2^{1/4} \ldots x_n^{1/2^n}.$$

Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (y_n).



625. Okrąg ω, opisany na trójkącie APQ, nie jest styczny do żadnego z dwóch danych okręgów (bo je przecina w punktach różnych od A). Zatem żaden z odcinków AQ, AP nie jest jego średnicą; w takim razie żaden z kątów APQ, AQP nie jest prosty. Stąd wniosek, że żaden z punktów P, Q nie leży na prostej AB, wobec czego prosta PQ nie przechodzi przez punkt C.

Mamy więc niezdegenerowany trójkąt CPQ, wpisany w okrąg ω. Wysokość poprowadzona z wierzchołka C, lub jej przedłużenie, przecina okrąg ω ponownie w punkcie A. Ortocentrum trójkąta CPQ leży w punkcie symetrycznym do A względem prostej PQ – czyli w punkcie B.

Punkty symetryczne do ortocentrum B względem boków CP i CQ także leżą na okręgu ω; oznaczmy je odpowiednio przez X i Y (żaden z nich nie pokrywa się z A, bo punkt C nie leży na prostej PQ).

Trójkąt CXP jest symetryczny do CBP, więc $|CX| = |CB|$, $|PX| = |PB|$. Ostatnia równość mówi, że X jest punktem okręgu o środku P, przechodzącego przez A i B. Skoro zaś leży na okręgu ω i nie pokrywa się z A, musi się pokrywać z D lub E; ustalmy oznaczenia (D, E) tak, że $X = D$.

Analogicznie stwierdzamy, że $|CY| = |CB|$, $|QY| = |QB|$, $Y = E$. Tak więc $|CD| = |CB| = |CE|$. To znaczy, że punkty B, D, E leżą na okręgu o środku C.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 621 ($WT = 3{,}00$) i 622 ($WT = 1{,}27$) z numeru 5/2011

Piotr Sobczak	Łódź	43,59
Paweł Kubit	Kraków	38,59
Tomasz Tkocz	Rybnik	38,41
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Janusz Olszewski	Warszawa	36,91
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Roksana Słowik	Knurów	31,49
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	31,04

626. Przyjmijmy oznaczenia:

$$u_n = \left(\frac{a+1}{2}\right)^{2^n}, \quad v_n = \left(\frac{a-1}{2}\right)^{2^n} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Widać, że $u_n = u_{n-1}^2$, $v_n = v_{n-1}^2$; $u_0 + v_0 = a$, $u_0 - v_0 = 1$, $u_1 - v_1 = a$.

Udowodnimy indukcyjnie dwie równości. Pierwsza z nich:

(1) $$x_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Dla $n = 1$ zgadza się. Przyjmijmy jej słuszność dla n. Wtedy dla $n + 1$ mamy

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = $$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} + \frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{u_{n-1} + v_{n-1}}\right) =$$
$$= \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^2 + (u_{n-1} - v_{n-1})^2}{2(u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2)} = \frac{u_n + v_n}{u_n - v_n},$$

stąd słuszność (1) dla wszystkich n.

Teraz druga z zapowiedzianych równości:

(2) $$y_n^{2^n} = u_n - v_n \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Znów, dla $n = 1$ zgadza się. Weźmy $n \geqslant 2$ i załóżmy, że równość analogiczna do (2) zachodzi dla $n - 1$:

$$y_{n-1}^{2^{n-1}} = u_{n-1} - v_{n-1}.$$

Z określenia ciągu (y_n) wynika, że $y_n = y_{n-1} x_n^{1/2^n}$. Stąd oraz z (1):

$$y_n^{2^n} = (y_{n-1}^{2^{n-1}})^2 \cdot x_n = (u_{n-1} - v_{n-1})^2 \cdot \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{u_{n-1} - v_{n-1}} =$$
$$= u_{n-1}^2 - v_{n-1}^2 = u_n - v_n,$$

co kończy dowód indukcyjny zależności (2).

Przepisujemy tę zależność w postaci

$$y_n^{2^n} = u_n q_n, \quad \text{gdzie} \quad q_n = 1 - \frac{v_n}{u_n} = 1 - \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2^n}.$$

Liczba a jest dodatnia, więc iloraz w nawiasie jest liczbą o module mniejszym od 1. Wobec tego $q_n \to 1$. Stąd, ostatecznie,

$$y_n = (u_n q_n)^{1/2^n} = \frac{a+1}{2} \cdot q_n^{1/2^n} \to \frac{a+1}{2}.$$