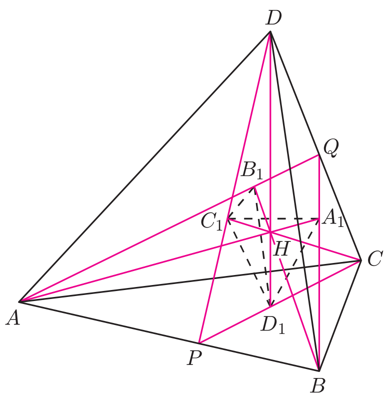
Kącik przestrzenny (11) Jak wyjść z dżungli?

Każdy, kto był w dżungli lub chociaż widział ją w jakimś filmie, wie, że poruszanie się po niej jest, delikatnie mówiąc, dosyć uciążliwe. Stanowi to ogromny kłopot szczególnie wtedy, gdy ktoś się w niej zgubi i chce się jakoś wydostać. Nie dość, że nie wiadomo, w jakim kierunku iść, to w ogóle ciężko jest nam pokonywać przeszkody (a rozwiązania siłowe, takie jak maczeta, niewiele dają). Istnieje następujące zalecenie: wystarczy znaleźć strumień (co zresztą wcale nie musi być łatwe), a potem liczyć na to, że zaprowadzi nas on do większej rzeki, a ta, być może, do morza.

Podobnie jest z zadaniem pochodzącym z finału olimpiady rosyjskiej z 1994 roku – oto ono:

Punkt H przecięcia wysokości AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 czworościanu $ABCD$ leży wewnątrz tego czworościanu oraz jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $A_1B_1C_1D_1$. Dowieść, że czworościan $ABCD$ jest foremny.

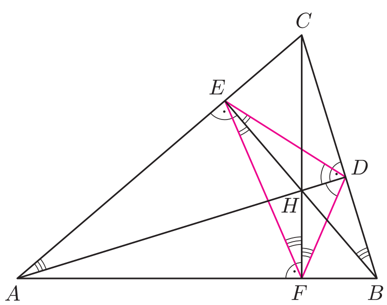


Rys. 1. Nawet jeśli narysujemy tylko płaszczyzny ABQ, CDP, $A_1C_1D_1$, $B_1C_1D_1$, to i tak rysunek jest bardzo nieczytelny.

Rysunek do tego zadania jest potworną plątaniną kresek – zupełnie nic nie widać. Może się wydawać, że znajdujemy się w samym środku dżungli... Okazuje się jednak, że wystarczy uczynić jedno drobne spostrzeżenie (czyli wypatrzeć strumień), które zaprowadzi nas łatwo do celu. Zatem do dzieła!

Z poprzednich kącików wiemy już, że warto zrobić sobie kilka rysunków, na których będą tylko potrzebne nam kreski. No właśnie, tylko co narysować, a czego nie? Wydaje się, że potrzebujemy stosunkowo dużo kresek (rys. 1) i właściwie nie widać, jak wykorzystać fakt, że punkt H jest środkiem sfery wpisanej w czworościan $A_1B_1C_1D_1$. Można tylko zobaczyć, że płaszczyzny wyznaczone przez dwie wysokości czworościanu $ABCD$ są płaszczyznami dwusiecznymi odpowiednich kątów dwuściennych czworościanu $A_1B_1C_1D_1$, ale co zrobić potem?

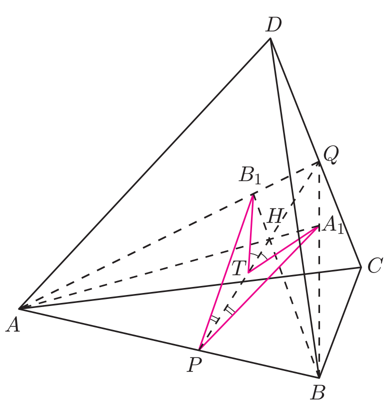
Próbujmy więc dalej. Pamiętamy również, że gdy nie wiemy, co zrobić w przestrzeni, to warto rozwiązać analogiczne zadanie na płaszczyźnie. No to rozwiążmy! Zakładamy, że ortocentrum danego trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez spodki jego wysokości i wtedy... No właśnie, niestety, na płaszczyźnie jest inaczej, bowiem zachodzi łatwe do udowodnienia



Rys. 2

Twierdzenie 1. *Punkt H przecięcia wysokości AD, BE i CF dowolnego trójkąta ostrokątnego jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt DEF* (rys. 2).

Tym razem nie uda się nam „zejście na ziemię". Zadanie wydaje się niemożliwe do rozwiązania. Ale przecież nie ma rzeczy niemożliwych, są tylko takie, których jeszcze nie potrafimy!



Rys. 3

Mimo wszystko może ten płaski odpowiednik zadania do czegoś nam się przyda. Przyjrzyjmy się dokładniej płaszczyźnie ABQ na rysunku 3. Wysokości czworościanu AA_1, BB_1 oraz odcinek PQ są wysokościami trójkąta ostrokątnego ABQ, a H jego ortocentrum. Korzystając teraz z twierdzenia 1, wnosimy, że H jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt A_1B_1P, czyli w szczególności $\sphericalangle A_1PH = \sphericalangle B_1PH$. Krawędź C_1D_1 leży w płaszczyźnie CDP i przecina odcinek PQ w punkcie T. Intuicja podpowiada nam, że, być może, zachodzi równość $\sphericalangle A_1TH = \sphericalangle B_1TH$. Może miary tych kątów płaskich są równe miarom odpowiednich kątów dwuściennych między płaszczyzną CDP a płaszczyznami $A_1C_1D_1$ i $B_1C_1D_1$ (których równość łatwo jest uzasadnić)? Niestety, w ogólnej sytuacji wcale nie musi tak być. Czyżby intuicja nas zawiodła? Otóż nie – można znaleźć uzasadnienie. Mianowicie, jeśli płaszczyzna CDP jest płaszczyzną dwusieczną kąta dwuściennego między płaszczyznami $A_1C_1D_1$ i $B_1C_1D_1$, to płaszczyzny te są symetryczne względem CDP. Ponadto z prostopadłości płaszczyzn ABQ i CDP wynika, że również proste A_1T i B_1T są symetryczne względem płaszczyzny CDP. To zaś oznacza, że $\sphericalangle A_1TH = \sphericalangle B_1TH$. W takim razie trójkąty A_1PT i B_1PT są przystające, skąd wniosek, że $PA_1 = PB_1$. Strumień został więc znaleziony! Dalej będzie już z górki.

Teraz w nietrudny sposób można wykazać, że $AQ = BQ$ (dowód pozostawiamy Czytelnikowi), a w takim razie też $AD = BD$. Analogicznie dowodzimy, że dowolne dwie sąsiednie krawędzie są równe, co kończy dowód. Nie ma rzeczy niemożliwych: każde, nawet najbardziej skomplikowane zadanie da się rozwiązać!

Michał KIEZA