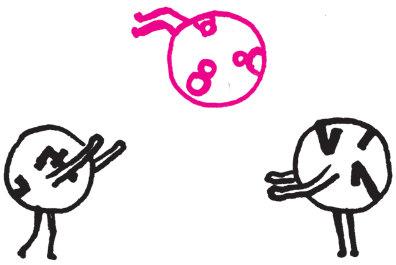
Gramy na kumulację. Kilka uwag o grze w *Lotto*

Bolesław KOPOCIŃSKI[*]

Organizatorzy gier liczbowych typu lotto przeznaczają sporą część dochodu na zysk i koszt pozyskania dochodu i ten fakt sprawia, że wiele osób powstrzymuje się od gry, a dopiero mechanizm kumulacji powoduje zainteresowanie grą. Dla organizatorów gier kumulacja jest tylko formą odłożenia wypłaty, przeto nic na niej nie tracą, natomiast nowi grający, oczekujący zysku z podziału kwoty odłożonej, grają przeciw stałym graczom.



Gra. Przyjmijmy, że w grze uczestniczy N osób, a stawka wynosi 1 złoty. Dochód N dzieli się na części: f_1N – część wzięta przez organizatora, f_2N – pula wygranych I stopnia (szóstek), f_3N – pula wygranych niższego stopnia. Gdy w danej grze szóstka nie padnie, ta druga część przenosi się na kolejną grę i mamy pierwszą kumulację. Brak szóstki w kolejnych grach daje sensacyjne niekiedy serie kumulacji. Pojawienie się szóstki w grze przerywa ciąg kumulacji, jest chwilą swoistej odnowy w ciągu gier.

W *Lotto* mamy dwa mechanizmy losowe: wybór szóstki M przez maszynę i wybór szóstki S przez gracza. Można założyć, że oba te losowania są niezależne. Rozkład M jest jednostajny:

$$P(M=\omega)=p=\frac{1}{\binom{49}{6}}$$

na zbiorze wszystkich możliwych szóstek ω wybranych spośród 49 liczb, natomiast $P(S=\omega)=p_\omega$ zależy od upodobań graczy. Ten drugi rozkład może być poznawany jedynie przez statystyków. Prawdopodobieństwo koincydencji wynosi

$$P(M=S)=\sum_\omega\sum_\sigma \mathbf{1}(\omega=\sigma)P(M=\omega)P(S=\sigma)=p.$$

Zapis $\mathbf{1}(\omega=\sigma)$ oznacza funkcję, która przyjmuje wartość 1, gdy $\omega=\sigma$, a w pozostałych przypadkach jej wartością jest 0.

Liczba szóstek. Niech X_N oznacza liczbę szóstek w grze przy udziale N osób. Jeśli założyć, że grający losują liczby wzajemnie niezależnie i mają określone predylekcje do liczb, ale nie mają ich do układów, to

$$\begin{aligned}P(X_N=k)&=\sum_\omega P(M=\omega)P(X_N=k|M=\omega)=\\&=p\sum_\omega\binom{N}{k}p_\omega^k(1-p_\omega)^{N-k}\approx\\&\approx p\sum_\omega\frac{(Np_\omega)^k}{k!}\exp(-Np_\omega),\qquad k\geqslant 0.\end{aligned}$$

Prawdopodobieństwo powstania kumulacji wynosi $P(X_N=0)$. Oczekiwana liczba szóstek w grze jest stała, $\mathrm{E}(X_N)=Np$, natomiast predylekcje zwiększają wariancję liczby głównych wygranych. Prosty rachunek daje wariancję

$$\mathrm{Var}(X_N)=Np(1-p)+N(N-1)p\sum_\omega(p-p_\omega)^2.$$

Ten fakt wyjaśnia, dlaczego w praktyce liczba wygranych I stopnia jest tak bardzo zmienna.

Gra na kumulację. Oznaczmy przez $p(N)$ prawdopodobieństwo pojawienia się przynajmniej jednej szóstki wśród N kuponów. Jest ono dość chimeryczne, zależy od liczb wylosowanych przez maszynę losującą i od upodobań grających do określonych liczb i ich konfiguracji. Gdyby gracze wybierali swoje typy jak maszyna, to mielibyśmy

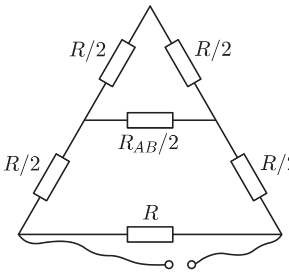
$$p(N)=1-(1-p)^N\approx 1-e^{-pN}.$$

Odnotujmy, że $p(mN)=1-(1-p(N))^m$.

Przyjmijmy, że skumulowane kwoty na nagrody I stopnia wynoszą K. Oczekiwaną wygraną W przypadającą na jeden kupon można znaleźć, dzieląc

[*]Uniwersytet Wrocławski

Rozwiązanie zadania F 804.
Z symetrii układu wynika, że może on być przedstawiony w następujący sposób:



gdzie $R = a\rho$. „Wewnętrzny” układ składa się z nieskończonej ilości oczek, a jego opór wynosi $R_{AB}/2$ (z symetrii układu).

Zatem

$$R_{AB} = R\frac{R + \frac{RR_{AB}/2}{R + R_{AB}/2}}{R + R + \frac{RR_{AB}/2}{R + R_{AB}/2}}.$$

Dodatnim rozwiązaniem powyższego równania jest

$$R_{AB} = R\frac{\sqrt{7}-1}{3} = a\rho\frac{\sqrt{7}-1}{3}.$$

Rozwiązanie zadania M 1337.
Zauważmy, że kwadrat liczby całkowitej przy dzieleniu przez 8 daje resztę 0, 1 lub 4, więc suma dwóch kwadratów – resztę 0, 1, 2, 4 lub 5. Gdyby istniały liczby całkowite a, b, c spełniające równanie z treści zadania, to liczba $(a^{1006})^2 + (b^{1006})^2$ dawałaby przy dzieleniu przez 8 resztę 6, co jest niemożliwe.

pulę nagród przez liczbę grających. Mamy

$$W = f_3 + \left(f_2 + \frac{K}{N}\right)p(N).$$

Wiadomo, że kumulacja powoduje wzrost liczby grających, a rzesza konkurentów do podziału kwoty odłożonej zmniejsza nasze szanse na sukces. Przy rosnącej liczbie grających prawdopodobieństwo kumulacji znika, $p(mN) \to 1$, gdy $m \to \infty$. Aby wejść do gry, należy trafnie przewidzieć liczbę grających. Statystyczną pewność (rozumianą jako zdarzenie o prawdopodobieństwie 0,95) tego, że wygrana I stopnia padnie, mamy dopiero przy N przekraczającym 42 miliony kuponów. Przy dużym N warunek $W \geqslant 1$ opłacalności gry implikuje $N \leqslant K/(1 - f_2 - f_3)$.

Wzrost liczby grających. Ocena wzrostu liczby grających w zależności od wielkości kumulacji jest trudnym problemem dla analityków gier. Przyjmijmy, że wzrost ten w ciągu kumulacji jest potęgowy: liczba grających w $n+1$ kolejnych grach będzie równa $N, aN, a^2N, \ldots, a^nN$. Pula nagród I stopnia przy n-tej kumulacji wynosi

$$f_2N(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = f_2N\frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Oczekiwana wygrana w n-tej kumulacji wynosi więc

$$W_n = f_3 + f_2\frac{1 - a^{n+1}}{(1-a)a^n}p(a^nN).$$

Przypuśćmy teraz, że liczba grających jest proporcjonalna do kumulacji. Niech (N_n, K_n), $n \geqslant 0$, oznaczają liczbę grających i kwotę kumulacji w serii. Ściśle biorąc, jeśli przyrost liczby grających jest proporcjonalny (ze współczynnikiem proporcjonalności b) do funduszu szóstek, to zachodzą wzory rekurencyjne:

$$\begin{aligned} &N_0 = N, && K_0 = 0, \\ &N_n = N_{n-1} + bK_n, && K_n = K_{n-1} + f_2N_{n-1}, \qquad n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Zwrot w n-tej grze wynosi

$$W_n^* = f_3 + f_2(1 + K_n/N_n)p(N_n), \qquad n \geqslant 0.$$

Obliczenia. Przeanalizujmy czas czekania na korzystne wejście do gry. Obserwując częstość pojawienia się pierwszej kumulacji, wielkość $p(N)$ można próbować oszacować. Niepoprawny optymista, nie mając danych, może przyjąć, że jest ono równe 1.

Weźmy dla przykładu $f_1 = f_2 = 0{,}4$, $f_3 = 0{,}2$ i niech $N = \binom{49}{6}$, a wtedy $p(N) = 1 - e^{-1}$. Eksperymenty numeryczne pokażą, jak wzrost liczebności grających wpływa na czas wejścia do gry. Przy wzroście potęgowym szukamy chwili, kiedy po raz pierwszy jest $W_n \geqslant 1$. Obliczenia pokazują, że przy $1{,}1 \leqslant a \leqslant 1{,}4$ mamy $n \geqslant 3$, przy czym dla $a = 1{,}4$ mamy $p(a^3N) = 0{,}94$. Przy wzroście proporcjonalnym szansa na zwrot $W_n^* = 1$, gdy $b = 0{,}2$, pojawia się przy sześciu kumulacjach. Przy $b = 0{,}3$ liczba grających rośnie tak szybko, że w grze na kumulację nie ma miejsca na zysk.

Manipulacja. Organizator gry, zainteresowany wzrostem liczby grających, może modyfikować podział puli na nagrody tak, ażeby kwota skumulowana rosła szybko, ma więc narzędzie do manipulowania klientami. Eksperymentując wielkością puli nagród poszczególnych stopni, pozostawmy zysk organizatora bez zmiany, przeznaczmy $0{,}4N$ na wygrane niższego stopnia i $0{,}2N$ na wygrane I stopnia. Zmiana nie wpłynie na liczbę wygranych, natomiast podwoi wygrane niższych stopni i zmniejszy kwoty skumulowane. Teraz czas czekania na korzystną kumulację wydłuży się. Przy wzroście potęgowym i $p(N) = 1 - e^{-1}$, dla $a = 1{,}2$ otrzymujemy $n = 4$, przy $a = 1{,}3$ otrzymamy $n = 5$, itd. Trzeba jednak pamiętać, że kiedy liczba grających wzrasta gwałtownie, warunki do gry na kumulację mogą nie być osiągnięte, nim padnie szóstka. Dodajmy jeszcze, zanim przystąpimy do gry na kumulację, że gigantyczne wygrane mają małą użyteczność dla szczęśliwców. Ale jest to już inny problem.