Doświadczenia myślowe

O wieszaniu bombek na choince

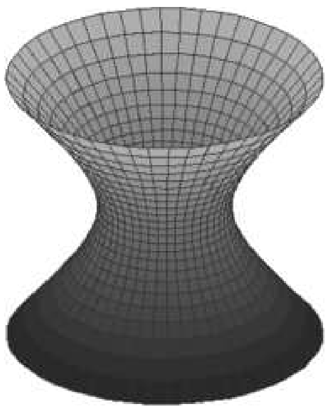
Krzysztof RUDNIK

Święta za pasem, więc poeksperymentujmy z wieszaniem bombek na choince.

Nasze bombki są kuliste – nie mają zaczepów, haczyków itp. Będziemy je wieszać za pomocą sztywnych obręczy z drutu w kształcie okręgu. Gdy bombkę uda się opasać obręczą w taki sposób, że nie można jej zsunąć, to cel będzie osiągnięty.

Figura jest wypukła, jeśli zawiera każdy odcinek o końcach do niej należących.

Niestety, bombce brakuje **talii** (jaką ma np. hiperboloida jednopowłokowa), wokół której da się ją skutecznie opasać. Możemy, oczywiście, wyciąć w bombce hiperboloidalną talię, nawet tak małą, że nikt ze świątecznych gości tego nie zauważy. Byłoby to jednak oszustwo, bo hiperboloidalna talia nie jest wypukła. Bombka z taką talią też by nie była, a na to nie chcemy się zgodzić!



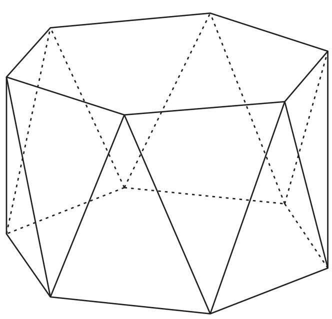
Hiperboloida jednopowłokowa ma talię, ale nie jest wypukła.

Czy da się tak zdeformować bombkę, żeby pozostała wypukła i dała się skutecznie opasać? **Czy istnieją wypukłe talie?** Nie ufaj, Czytelniku, intuicji, jeśli podpowiada Ci, że nie, bo...

Talia może być wypukła

Do wykonania wypukłej talii potrzebne nam będzie potężne, ale proste w użyciu narzędzie teorii zbiorów wypukłych – **operacja uwypuklenia**, która każdemu zbiorowi B w przestrzeni przyporządkowuje zbiór $\mathrm{Conv}(B)$, czyli najmniejszy zbiór wypukły zawierający B. Uwypukleniem skończonego zbioru punktów jest wielościan (wypukły, oczywiście).

Zbudujmy graniastosłup prawidłowy n-kątny o podstawach W_n i W'_n ($n \geqslant 3$). Obróćmy podstawę W'_n o kąt π/n wokół osi graniastosłupa, otrzymując wielokąt W''_n, i przyjrzyjmy się zbiorowi $T_n = \mathrm{Conv}(W_n \cup W''_n)$. Otrzymaliśmy wielościan wypukły, którego ścianami bocznymi są trójkąty równoramienne. Jeśli ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to wielościan jest **antygraniastosłupem**. Środki jego krawędzi bocznych są wierzchołkami $2n$-kąta foremnego i leżą wewnątrz walca wyznaczonego przez podstawy W_n i W''_n (dlaczego?), a zatem okrąg na nich opisany ma krótszy promień niż promienie okręgów opisanych na podstawach wielościanu. To zaś oznacza, że skonstruowaliśmy **wypukłą talię**!



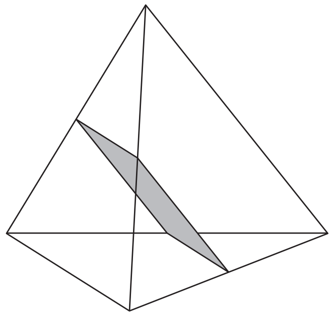
Antygraniastosłup

Wykonanie wypukłej bombki z talią jest teraz proste. Wystarczy wyciąć jej cienki plasterek z okolic równika, umiejętnie wkleić w to miejsce odpowiednią talię i uwypuklić to, co powstało! Jeśli dobrze dobierzemy parametry talii (wysokość i głębokość wcięcia), to otrzymamy bryłę bardzo podobną do kuli. Będzie, co prawda, kanciasta, ale przecież nie można mieć (albo nie mieć) wszystkiego naraz...

A teraz... zagadka z niespodzianką

Przy konstrukcjach geometrycznych, w których występują sparametryzowane obiekty, warto się czasem zastanowić, co się stanie, gdy parametry przyjmą wartości graniczne. Np. co będzie, gdy okrąg skurczy się do punktu ($r = 0$) lub się wyprostuje ($r = \infty$). W przypadku konstrukcji talii parametrem jest liczba n ($3 \leqslant n < \infty$) wierzchołków jej podstawy. Gdy $n \to \infty$, to talia T_n coraz bardziej przypomina walec i traci swoją taliowatość, by ją w granicy stracić całkowicie. Z tej strony zakresu parametrów nie znajdziemy nic ciekawego.

W talii T_3 też nie ma nic szczególnego. Może się jednak zdarzyć, że stosunek długości krawędzi podstawy do krawędzi bocznej jest równy $\sqrt{2}$. Dolepmy wtedy do podstaw ostrosłupy, których krawędzie boczne mają długość krawędzi bocznej talii. Otrzymany w ten sposób wielościan wypukły z talią widujesz, Czytelniku, codziennie. **Co to za bryła?** (rysunek w numerze).



Czworościan foremny też ma talię.

To była zagadka, a gdzie jest niespodzianka? Żeby ją znaleźć, trzeba przekroczyć granicę. Wyobraźmy sobie, że $n = 2$, tzn. konstrukcję talii zaczynamy od „dwukątów” (czyli odcinków). Jeśli odległość odcinków dobraliśmy w taki sposób, że T_2 jest antygraniastosłupem, to jest to wielościan wypukły z talią o sześciu krawędziach równej długości... Oto obiecana niespodzianka na Święta – czworościan foremny ma talię, która ma kwadratowy przekrój (dlaczego?)!