Jak widać, nie ma istotnej różnicy. Jedyna i to nieznaczna różnica występuje w metodzie D'Hondta.

Zaskoczonych różnicami między zawartością tabeli a składem Sejmu spieszymy poinformować, że zgodnie z obowiązującymi przepisami, mandaty rozdziela się w komisjach wyborczych.[23] Oto jak wygląda ten podział według różnych metod:

	Metoda					
partia	Adamsa	duńska	Deana	Hilla	Sainte-Laguë	D'Hondta
PO	185	191	191	191	198	207
PiS	147	153	153	154	153	157
RP	58	52	52	52	48	40
PSL	36	32	32	32	32	28
SLD	33	31	31	30	28	27

Różnica między metodą najbardziej[24] a najmniej[25] sprzyjającą małym partiom jest znaczna: PO i PiS zyskują na obowiązującej metodzie 22 i 10 mandatów, a RP, PSL i SLD tracą 18, 8 i 6 mandatów.

Metody: duńska, Deana i Hilla dają praktycznie te same rezultaty.

Istotnie inny podział mandatów przedstawia umiarkowanie sprzyjająca małym partiom metoda Sainte-Laguë.

Ciekawym parametrem jest efektywność głosowania, wyrażona liczbą mandatów uzyskanych ze 100 tys. oddanych głosów.

partia	głosy	metoda D'Hondta	efektywność
PO	5629773	207	3,68
PiS	4295016	157	3,66
RP	1439490	40	2,78
PSL	1201628	28	2,33
SLD	1184303	27	2,28

Jak wiadomo, metoda D'Hondta minimalizuje różnicę między największą a najmniejszą efektywnością.

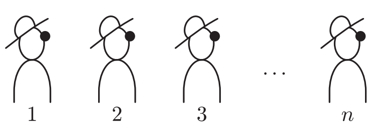
[23] w tych wyborach było 41 komisji.

[24] metoda Adamsa.

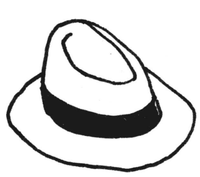
[25] metoda D'Hondta, obowiązująca w Polsce.

O kapeluszach i pewnym pewniku

Tomasz IDZIASZEK



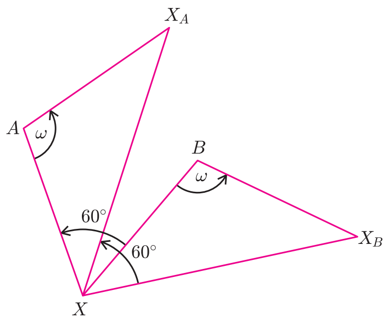
O ciekawych problemach związanych z kapeluszami pisaliśmy już w *Delcie* nie raz, ale że dobrego nigdy za wiele, napiszemy też i w tym numerze, tyle że inaczej. Sytuacja jest następująca: w rzędzie stoi n osób i każdej z nich nałożony został na głowę biały lub czarny kapelusz. Każda widzi kapelusze tych osób, które stoją przed nim, zatem pierwsza osoba widzi kapelusze wszystkich pozostałych, natomiast ostatnia osoba nie widzi żadnego (rysunek). Oczywiście, nikt nie widzi swojego kapelusza i w tym cała zabawa, gdyż zadaniem każdej z osób jest odgadnięcie, jakiego koloru kapelusz ma na głowie. Uczestnicy zabawy odgadują po kolei, począwszy od pierwszej osoby w rzędzie, i każdy słyszy odpowiedzi poprzedników. Uznajemy, że się udało, jeśli błędnej odpowiedzi udzieliła nie więcej niż jedna osoba. A jak to z zabawami bywa, warto, by były udane. Z tego też powodu uczestnicy, przed nałożeniem kapeluszy na ich głowy, mogą się naradzić i ustalić wspólną strategię postępowania.



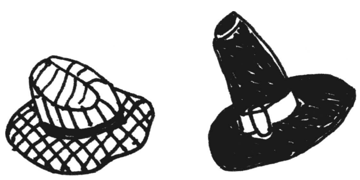
W tym momencie zachęcamy Czytelników do przerwania lektury i zastanowienia się, dla jakich n istnieje strategia gwarantująca wygraną.

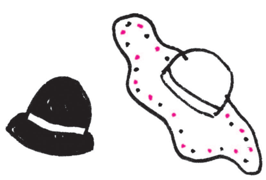
Spróbujmy w następujący sposób: pierwsza osoba, nieważne, jak będzie się starać, ma 50% szans na odgadnięcie koloru swojego kapelusza. W pesymistycznym przypadku musimy więc założyć, że udzieli błędnej odpowiedzi i tym samym wykorzysta cały dostępny limit pomyłek.

Rozwiązanie zadania M 1333.
Załóżmy najpierw, że punkt X jest taki, że trójkąt XX_AX_B jest równoboczny. Wówczas trójkąty AXX_A i BXX_B są przystające, gdyż są podobne i $XX_A = XX_B$. Ponieważ obrazem odcinka XX_B przy obrocie o kąt $60°$ (skierowany zgodnie z kątem ω) względem punktu X jest odcinek XX_A, więc obrazem trójkąta BXX_B jest trójkąt AXX_A. Zatem kąt AXB ma miarę $60°$, a ponadto $XA = XB$, więc trójkąt AXB jest równoboczny.



Są dwa punkty X, dla których trójkąt AXB jest równoboczny. Łatwo sprawdzić, że dla nich trójkąt XX_AX_B jest też równoboczny. Zatem są to wszystkie szukane punkty.





O liczbach porządkowych można przeczytać na naszej stronie `deltami.edu.pl` w artykułach Andrzeja Mostowskiego.

Pogodzeni z tym faktem, spróbujemy w jej odpowiedzi przemycić bit informacji dla pozostałych uczestników. Oznaczmy przez k_i kolor kapelusza i-tej osoby ($k_i = 0$, jeśli jest to biały kapelusz, i $k_i = 1$, jeśli kapelusz jest czarny), a przez c_i liczbę czarnych kapeluszy, które i-ta osoba widzi przed sobą.

Zrobimy teraz tak: pierwsza osoba mówi „biały”, jeśli c_1 jest parzyste, a w przeciwnym przypadku mówi „czarny”. Co nam z tego przyjdzie? Ano tyle, że ta informacja wystarczy, by druga osoba bezbłędnie odgadła kolor swojego kapelusza. W istocie, ponieważ $c_1 \equiv k_2 + c_2 \pmod 2$, zatem usłyszawszy przed chwilą wartość c_1 mod 2, bez trudu wyznaczy ona k_2. Co więcej, każda kolejna osoba może postąpić podobnie, korzystając z faktu, że

$$c_1 \equiv k_2 + k_3 + \ldots + k_i + c_i \pmod 2,$$

oraz z tego, że zna wartości $k_2, k_3, \ldots, k_{i-1}, c_i$ oraz c_1 mod 2.

Potrafimy więc znaleźć strategię dla dowolnie dużego n. I tu nasuwa się pytanie: a co, jeśli n byłoby nieskończone? Innymi słowy, mamy nieskończony rząd osób, w którym i-ta osoba widzi kapelusze wszystkich osób o większych numerach (jest ich, oczywiście, nieskończenie wiele). Czy i tym razem będzie istniała strategia? Podkreślmy, że nie osłabiamy żadnej z reguł zabawy, zatem nadal dopuszczamy tylko jedną pomyłkę. Zauważmy też, że nasza strategia dla skończonego n nie będzie tu działać, gdyż c_1 może nie być liczbą naturalną.

Odpowiedź jest nieco zaskakująca: strategia istnieje. Po raz drugi zachęcamy Czytelników, aby przez (być może dłuższą) chwilę zmierzyli się z tym zadaniem samodzielnie.

Nieskończony ciąg $(k_1, k_2, \ldots)$ kolorów kapeluszy oznaczać będziemy przez k. Powiemy, że dwa nieskończone ciągi k i k' są w relacji $\sim$, jeśli różnią się na skończenie wielu pozycjach. Piszemy więc $k \sim k'$, jeśli zbiór $\{i \mid k_i \neq k'_i\}$ jest skończony. Łatwo przekonać się, że tak zdefiniowana relacja $\sim$ jest relacją równoważności. I teraz z pomocą przychodzi nam wspomniany w tytule pewien pewnik, a konkretnie pewnik wyboru – nieocenione źródło matematycznych paradoksów. Dzięki niemu możemy dla każdej klasy abstrakcji relacji $\sim$ wybrać jej reprezentanta i poinformować wszystkich o tym, który został wybrany. Innymi słowy, istnieje taka funkcja f, określona na zbiorze wszystkich ciągów kolorowań kapeluszy, która dla dowolnego k spełnia $f(k) \sim k$ oraz dla dowolnych k, k', jeśli $k \sim k'$, to $f(k) = f(k')$. Zauważmy teraz, że jeśli uczestnicy porozumieją się co do wyboru funkcji f, to każdy z nich będzie mógł obliczyć ten sam ciąg $\ell := f(k)$, gdyż nie zna on tylko skończonej liczby wyrazów ciągu k. Zauważmy też, że jeśli teraz i-ty zawodnik odpowie ℓ_i (nawet nie czekając na odpowiedzi poprzedników), to ponieważ $k \sim \ell$, więc będziemy mieli tylko skończoną liczbę pomyłek.

W tym momencie spróbujemy wyeliminować te pomyłki metodą analogiczną jak w przypadku skończonym. Oznaczmy przez I zbiór numerów osób (poza pierwszą), których kolory kapeluszy k_i nie zgadzają się z kolorami w ciągu $\ell = f(k)$, czyli $I := \{i \geqslant 2 \mid k_i \neq \ell_i\}$. Skoro $k \sim \ell$, to zbiór I jest skończony. Niech c'_i będzie liczbą osób ze zbioru I, które widzi osoba i. Niech też $\chi_i = 1$, jeśli $i \in I$, oraz $\chi_i = 0$, gdy $i \notin I$. Każda z osób (poza pierwszą) musi zdecydować, czy nie należy do zbioru I, i wtedy odpowiada zgodnie z ℓ_i, czy też należy (i wtedy musi odpowiedzieć przeciwnie). Pierwsza osoba podaje c'_1 mod 2. Druga osoba wie, że $c'_1 \equiv \chi_2 + c'_2 \pmod 2$, jest więc w stanie wyznaczyć χ_2, stwierdzić, czy należy do I, i odpowiedzieć poprawnie. Analogicznie i-ta osoba oblicza χ_i z zależności

$$c'_1 \equiv \chi_2 + \chi_3 + \ldots + \chi_i + c'_i \pmod 2$$

oraz z faktu, że χ_j dla $j < i$ jest równe 1 wtedy i tylko wtedy, gdy j-ta osoba udzieliła odpowiedzi niezgodnej z wartością ℓ_j.

I to by było na tyle, gdyby nie to, że pokazując istnienie strategii dla $n = 1, 2, \ldots, \omega$, otwieramy drogę kolejnym pytaniom: a co, jeśli n jest liczbą porządkową większą niż ω? Zastanówmy się więc nad istnieniem strategii w przypadku $\omega + 1$ (czyli za nieskończonym rzędem osób stoi jeszcze jeden uczestnik o numerze ω, który odpowiada na samym końcu). Czytelnik znów zdecyduje, na jak długo przerwać w tym miejscu lekturę.

Wydawać by się mogło, że nie da się uniknąć co najmniej dwóch pomyłek, gdyż osoba ω, nie widząc nikogo innego, musi wprost otrzymać kolor swojego kapelusza, co wymagałoby przekazania dodatkowego bitu informacji. Jednak nie należy zapominać o tym, że usłyszała ona odpowiedzi wszystkich pozostałych uczestników, zatem zna kolory kapeluszy $k_2, k_3, \ldots$ (wszak ci uczestnicy odpowiadali poprawnie). Jest zatem w stanie obliczyć ciąg ℓ i tym samym zbiór I. W tym momencie łatwo już jest zmodyfikować strategię: pierwsza osoba zamiast c'_1 podaje $c''_1 := (c'_1 + k_\omega) \bmod 2$. Pozostałe osoby o numerach naturalnych, widząc k_ω, są w stanie odzyskać c'_1 i grać jak poprzednio. Natomiast uczestnik ω, znając c'_1, bez trudu oblicza k_ω.

Łatwo wskazać, jak zmodyfikować powyższą strategię, by działała w przypadku $\omega + 2$, $\omega + 3$, a nawet $\omega + \omega$. A jaką strategię zastosować dla ω^2? A ω^ω? A może dla każdej liczby porządkowej można wskazać analogiczną strategię? Wreszcie, co w przypadku, gdy mamy więcej kolorów kapeluszy?

Prosto z nieba: Czerń nocnego nieba

Astronom w swojej pracy koncentruje się zazwyczaj na badaniu konkretnych obiektów nocnego nieba, stosownie do swojej, dość wąskiej zazwyczaj, specjalizacji. Używając coraz bardziej technicznie wyrafinowanych instrumentów, wykrywa (bądź nie) subtelne efekty przewidziane przez coraz bardziej złożone teorie. Stosunkowo rzadko natomiast obserwacja, którą każdy z nas może przeprowadzić gołym okiem, staje się przedmiotem poważnych rozważań. Przykładem takiego spostrzeżenia o doniosłych konsekwencjach jest stwierdzenie, że niebo nocą jest ciemne. Na pierwszy rzut oka obserwacja ta może wydać się banalna, rozmyślali jednak o niej m.in. Johannes Kepler i Edmond Halley. Dzięki Heinrichowi Olbersowi, dziewiętnastowiecznemu niemieckiemu lekarzowi i astronomowi-amatorowi, szybko urosła ona do rangi doniosłego problemu, któremu uwagę poświęcał później m.in. Kelvin. Cóż jednak niezwykłego może kryć się w mroku nocnego nieba?

Paradoks, kojarzony dziś z nazwiskiem Olbersa, jest bardzo prosty. Przypuśćmy, że Wszechświat miałby być nieskończony, wieczny i statyczny, a koncentracja gwiazd we Wszechświecie – stała. Wówczas przy spoglądaniu w dowolnym kierunku wzrok nasz powinien natrafić na tarczę jakiejś gwiazdy. Ponadto osłabienie natężenia promieniowania odległych gwiazd o czynnik proporcjonalny do kwadratu odległości jest równoważone przez fakt, że liczba gwiazd na jednostkę odległości od Ziemi rośnie o taki sam czynnik. W rezultacie nieboskłon powinien świecić z jasnością Słońca. Nie świeci.

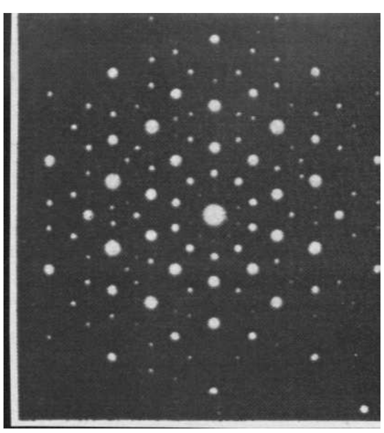
Można zaryzykować tezę, że próby rozwiązania paradoksu Olbersa trwale zmieniły oblicze kosmologii. Odkrycie ucieczki galaktyk przez Edwina Hubble'a doprowadziło do powstania teorii Wielkiego Wybuchu, określenia wieku Wszechświata, pomiarów jego rozmiaru, gęstości, składu i innych własności. Dokładny opis ewolucji Wszechświata od chwil, kiedy był on bardzo gęsty i gorący, wymagał użycia ogólnej teorii względności, fizyki jądrowej oraz fizyki cząstek elementarnych. Obecnie wiemy, że pokolenia gwiazd istnieją jedynie przez ułamek wieku Wszechświata. Fakt, że prędkość światła jest skończona, w połączeniu z rozszerzaniem się Wszechświata oznacza, że istnieje *horyzont cząstek*, na zewnątrz którego znajduje się obszar zawierający obiekty, od których światło jeszcze do nas nie dotarło (i być może nigdy nie dotrze).

Całkiem nieźle, jak na tak „niskobudżetową” obserwację. Pozostaje tylko życzyć formułowania podobnie prostych pytań prowadzących do równie ważnych co niespodziewanych odpowiedzi!

Michał BEJGER

Od razu wiedzieliśmy

Nagrodę Nobla z chemii w bieżącym roku uzyskał Daniel Shechtman z Hajfy (Izrael). O jego odkryciu pisaliśmy w *Delcie* 8/1986, publikując oryginalny obraz dyfrakcji elektronów na krysztale gwałtownie schłodzonego stopu Al_6Mn. Oto on.



Wyraźnie widać dziesięciokątną symetrię. Jak wiadomo, nie ma kryształów o symetrii będącej wielokrotnością liczby 5. Bo też nie jest to kryształ, tylko faza metastabilna stopu złożonego z 86% glinu i 14% manganu. Jest trwała w temperaturze pokojowej i niknie przy podgrzaniu do 400°C, gdy następuje restrukturyzacja do „zwykłego” kryształu Al_6Mn.

Od tego – pozornie tylko metalurgicznego – odkrycia zaczęła się ważna epoka badań kwazikryształów.

Wiedzieliśmy o tym już wtedy, pisząc, że odkrycie Shechtmana to *początek wielkiej naukowej sensacji*.

Red.