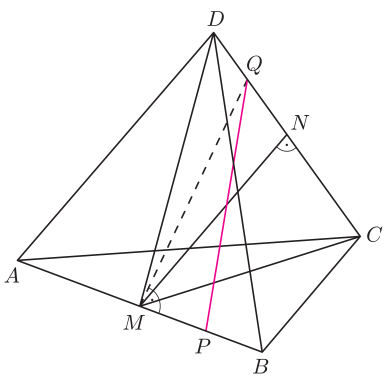
Kącik przestrzenny (10) Trzy rozwiązania pewnego zadania

W tym kąciku zajmiemy się pewnym zadaniem o czworościanie foremnym, o którym, między innymi, miałem okazję opowiadać na XLVI Szkole Matematyki Poglądowej pod hasłem ***Podejście niestandardowe***.

Dany jest czworościan foremny o krawędzi długości $a+b$. Punkty P i Q leżą na krawędziach AB i CD, przy czym $AP = a$, $BP = b$, $CQ = a$, $DQ = b$. Znaleźć długość odcinka PQ.

Zadanie jest szkolne, a więc zobaczmy, jak wygląda typowo szkolny sposób rozwiązywania.



Rys. 1

Sposób I – za pomocą twierdzenia Pitagorasa

Oznaczmy przez M i N środki krawędzi AB i CD. Odcinki CM i DM są wysokościami trójkątów równobocznych ABC i ABD, a więc ich długości są równe $\frac{\sqrt{3}}{2}(a+b)$. Trójkąt CMD jest więc równoramienny, zatem jego środkowa MN jest jednocześnie jego wysokością i z twierdzenia Pitagorasa obliczymy, że $MN = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)$. Jeśli $a=b$, to wiemy już, że $PQ = MN = a\sqrt{2}$. Dalej przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $a > b$. Trójkąt MNQ jest prostokątny, a skoro $NQ = \frac{a-b}{2}$, to znów korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy, że

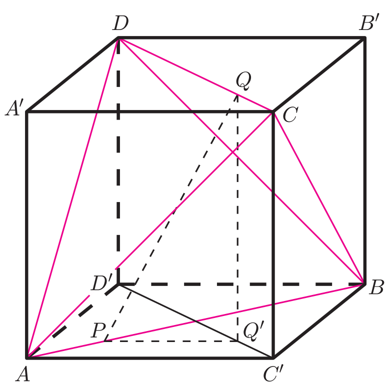
$$MQ^2 = \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Płaszczyzna CDM jest płaszczyzną symetralną odcinka AB, a więc jest do niego prostopadła. To samo dotyczy dowolnej prostej w niej zawartej, skąd wniosek, że $MQ \perp AB$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego PMQ dostajemy

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 = \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{2} = a^2 + b^2,$$

skąd $PQ = \sqrt{a^2+b^2}$.

Rachunki dość uciążliwe, ale wynik podejrzanie ładny... Spróbujmy więc innego podejścia. Doświadczony uczestnik olimpiad, jak również Czytelnik Uważny, spojrzałby na to w następujący sposób.



Rys. 2

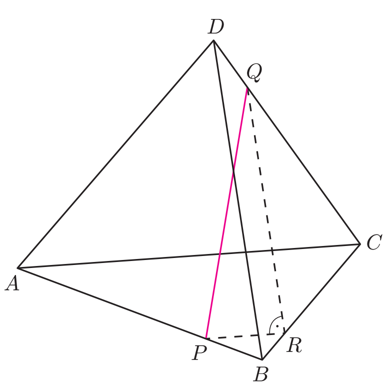
Sposób II – za pomocą wpisania czworościanu foremnego w sześcian

Na czworościanie $ABCD$ opiszmy sześcian $AC'BD'A'CB'D$. Długość jego krawędzi jest równa $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Niech Q' będzie takim punktem na odcinku $C'D'$, że $Q'C' = a$ i $Q'D' = b$. Wtedy odcinek QQ' jest prostopadły do podstawy $AC'BD'$, a jego długość jest równa długości krawędzi sześcianu, czyli $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Znowu, jeśli $a=b$, to punkt Q' pokrywa się z punktem P, a więc odcinek PQ pokrywa się z QQ' – stąd $PQ = \frac{a+b}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$. W przeciwnym przypadku trójkąt $PQ'Q$ jest prostokątny. Korzystając np. z twierdzenia Talesa, możemy obliczyć, że $PQ' = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Stosując teraz twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $PQ'Q$, otrzymujemy

$$PQ^2 = PQ'^2 + QQ'^2 = \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} = a^2 + b^2$$

i znów $PQ = \sqrt{a^2+b^2}$.

Tym razem rachunki były krótsze, ale nadal trzeba coś obliczyć, a poza tym w obu rozwiązaniach obliczenia nie obejmują przypadku $a=b$. Pokażemy więc sposób, który daje wynik natychmiast i bez rozpatrywania dwóch przypadków.



Rys. 3

Sposób III – za pomocą... chytrego, niestandardowego pomysłu

Niech R będzie takim punktem leżącym na krawędzi BC, że $BR = b$ i $CR = a$. Trójkąty BPR i CQR są równoboczne, a stąd wynika, że $PR = b$ i $QR = a$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnioskujemy, że $PR \parallel AC$ i $QR \parallel BD$. Ale krawędzie AC i BD czworościanu $ABCD$ są prostopadłe (dlaczego?), skąd wnioskujemy, że trójkąt PRQ jest prostokątny. Twierdzenie Pitagorasa daje więc wynik $PQ = \sqrt{a^2+b^2}$.

Michał KIEZA