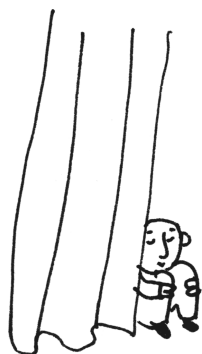


Jak złapać terrorystę?

Marian Marek KĘDZIERSKI*



Oczywiście, stwierdzenie to wywoła gwałtowny protest wielu samotnych fizyków. Fakt faktem, nie mogą oni w to uwierzyć, dopóki sami nie zostaną rodzicami.

Któż z nas nie bawił się jako dziecko w chowanego? Zabawa ta sprawia dzieciom wiele radości, mimo że z algorytmicznego punktu widzenia jest bardzo prosta. Jeżeli bowiem wszyscy ukrywający się czekają uczciwie w swoich kryjówkach, to zawsze uda się ich znaleźć – wystarczy, jeżeli szukający przejrzy wszystkie miejsca.

Sytuacja jednak komplikuje się, kiedy ukryte osoby mogą zmieniać swoje kryjówki w czasie poszukiwań. Okazuje się, że wtedy szala trudności przechyla się w drugą stronę. O ile w oryginalnym sformułowaniu wiele osób ukrywało się i wystarczyła jedna, aby je znaleźć, o tyle teraz do znalezienia nawet jednej osoby zwykle potrzeba wielu szukających.

Poszukiwania stają się jeszcze trudniejsze, jeżeli nie znamy ograniczenia na prędkość uciekiniera. Zapewne sytuacja ta jest dobrze znana rodzicom próbującym znaleźć swoje pociechy – dobrze wiedzą, że dzieci potrafią się poruszać z dowolną prędkością, niekoniecznie ograniczoną przez prędkość światła.

Problem. Spróbujmy sformalizować nasze zadanie. Zastanawiamy się nad kwestią przeszukiwania spójnego grafu nieskierowanego, np. reprezentującego budynek, w którym ukrywa się terrorysta. Nie wiemy, gdzie on jest, jak się będzie poruszał ani nawet jak szybko będzie w stanie to robić. Interesuje nas minimalna liczba policjantów potrzebnych do przeszukania grafu i złapania terrorysty bez względu na jego sposób poruszania się.

To zadanie ma wiele wersji, więc potrzebujemy uściślić pewne założenia. W naszym przypadku zakładamy, że terrorysta zostanie złapany, jeżeli w danym momencie spotka policjanta w tym samym wierzchołku bądź w tym samym punkcie krawędzi. Innymi słowy, stojąc w dowolnym wierzchołku, policjant widzi jedynie ten wierzchołek (bez krawędzi z niego wychodzących) i podobnie, stojąc w krawędzi, widzi tylko ten jej punkt, w którym sam się znajduje, a nie całą krawędź.

Szukana liczba policjantów jest parametrem grafu. Nazwijmy ją *liczbą policyjną* grafu.

Rozpatrzmy kilka przykładów (patrz rys. 1):

- Dla grafu będącego ścieżką liczba policyjna wynosi 1, bo wystarczy, że jedna osoba przejdzie graf od początku do końca.
- Dla cyklu potrzebne są już dwie osoby, bo jeżeli jeden policjant porusza się po cyklu, to terrorysta może np. zawsze ukrywać się w wierzchołku sąsiednim do tego, w którym jest policjant, i poruszać się tak samo, jak on. Dwóch policjantów już może przeszukać cykl – wystarczy, jeżeli jeden poczeka w pewnym wierzchołku, a drugi przejdzie cały cykl.
- Dla gwiazdy (czyli grafu, w którym pewien wierzchołek v jest połączony ze wszystkimi pozostałymi, a każda krawędź jest incydentna z v) potrzeba dwóch przeszukujących, bo w czasie, kiedy jeden odwiedza pewien wierzchołek różny od v , terrorysta może przemieszczać się dowolnie po pozostałych wierzchołkach (pod warunkiem, że wszystkich wierzchołków jest co najmniej 4). Dwóch policjantów wystarczy, bo jeden może stanąć w wierzchołku v , a drugi w tym czasie może przejrzeć cały graf.

Pierwsze próby rozwiązania. Zastanówmy się nad jakimiś ograniczeniami na liczbę szukających. Oczywiście, zawsze wystarczy $|V| + 1$ policjantów, gdzie V jest zbiorem wierzchołków grafu, ponieważ możemy w każdym wierzchołku postawić strażnika i jednym dodatkowym policjantem przeszukać wszystkie krawędzie.

Rys. 1. Wyznaczanie liczby policyjnej a) ścieżki, b) cyklu, c) gwiazdy. Kolorowy punkt z literą T oznacza terrorystę, pozostałe punkty oznaczają policjantów. Kolorowe strzałki pokazują strategię policjantów.

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Jest to jednak bardzo zgrubne ograniczenie, zwykle liczba policyjna będzie znacznie mniejsza. Wiemy jednak dzięki niemu, że rząd rozwiązania to $O(|V|)$.

Możemy też dla danego grafu G wykonywać pewne redukcje do mniejszych instancji zadania (choć nie wszystkie zachowują dokładne rozwiązanie):

- Możemy z grafu usunąć każdy wierzchołek stopnia 2, łącząc przy tym incydentne z nim krawędzie w jedną.
- Możemy umieścić kilku (powiedzmy k) strażników w pewnym podzbiorze wierzchołków, którego usunięcie spowodowałoby rozspójnienie grafu (możemy np. wybrać do tego punkty artykulacji). Następnie możemy znaleźć rozwiązanie dla każdej z powstałych spójnych składowych oddzielnie. Powiedzmy, że znalezione dla nich liczby policyjne to a_1, a_2, \dots, a_m ; wtedy dostateczną (choć niekoniecznie minimalną) liczbą jest $k + \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Odpowiada to strategii, w której zespół k policjantów pilnuje przejścia między otrzymanymi spójnymi składowymi, natomiast zespół pozostałych przeszukuje po kolei wszystkie składowe.
- Możemy z grafu usunąć wszystkie wierzchołki o stopniu 1 (incydentne z dokładnie jedną krawędzią – nazwijmy je *liśćmi*), otrzymując graf G' . Jeżeli obliczymy liczbę policyjną l dla grafu G' , to do przeszukania oryginalnego grafu G wystarczy nam $l + 1$ policjantów, ponieważ możemy przy pomocy l policjantów przeszukiwać podgraf G' i dla każdego liścia v całego grafu G zatrzymać tych l policjantów w momencie, kiedy jedyny sąsiad u liścia v zostaje po raz ostatni odwiedzony w strategii przeszukiwania G' . W tym momencie może wkroczyć do akcji dodatkowy policjant, który przybiegnie do u i z niego przejdzie do v . W ten sposób wierzchołek v oraz incydentna z nim krawędź $u-v$ zostaną przeszukane i nigdy więcej terrorysta nie będzie mógł się tam znaleźć.

Punktem artykulacji grafu nazywamy pojedynczy wierzchołek, którego usunięcie powoduje rozpad pewnej spójnej składowej grafu na kilka mniejszych.



Niestety, powyższe redukcje (oprócz pierwszej) nie są dokładne, tzn. pozwalają jedynie na znalezienie pewnej dostatecznej liczby policjantów, ale niekoniecznie minimalnej.

Okazuje się, że problem wyznaczenia liczby policyjnej grafu jest NP-trudny. Znaczący to, że ludzkość nie zna żadnego rozwiązania o wielomianowej złożoności czasowej. Jednak w przypadku tego problemu nie jest nawet jasne, w jaki sposób rozwiązać go w czasie wykładniczym lub nawet $O(n!)$, co dla większości NP-trudnych problemów jest oczywiste.

Postaramy się więc znaleźć rozwiązanie działające w czasie wykładniczym.

Algorytm. Znamy już pewne sposoby ograniczania liczby policyjnej z góry. Żeby jednak móc analizować jej ograniczenia z dołu, potrzebujemy jakiegoś opisu wszystkich możliwych rozwiązań. Do skonstruowania tego opisu będzie nam pomocny następujący

Fakt 1. Liczba policyjna grafu nie zmienia się przy przyjęciu ograniczenia, że policjanci poruszają się po kolei, tzn. w każdym kroku jeden z nich przesuwa się do sąsiedniego wierzchołka.

Dzięki temu stwierdzeniu możemy podzielić cały czas przeszukiwania na dyskretne momenty. To pozwala nam w pewien sposób opisać i usystematyzować możliwe strategie jako sekwencje dyskretnych ruchów policjantów.

Jeżeli znalibyśmy jeszcze górne ograniczenia na czas przeszukiwania w takiej strategii, to moglibyśmy już podać pewien „brutalny” algorytm przeszukujący wszystkie możliwe sekwencje ruchów. Złożoność takiego podejścia byłaby trudna do oszacowania, jednak prawdopodobnie istotnie przekraczałaby złożoność wykładniczą.



Rozwiązanie zadania M 1334.

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczby k i k^3 dają tę samą resztę z dzielenia przez 3 (wystarczy to sprawdzić dla $k \in \{0, 1, 2\}$). Zatem liczby k, k^3, k^5, k^7, \dots dają tę samą resztę z dzielenia przez 3. Stąd

$$m^{m+1}, m^{m+7}, (m+6)^{m+7}$$

dają tę samą resztę z dzielenia przez 3.

Ciąg reszt z dzielenia przez 3 liczb

$1^2, 2^3, 3^4, \dots$ jest więc okresowy

o okresie 6 i zaczyna się od 1, 2, 0, 1, 1, 0.

Ponieważ $2011 = 335 \cdot 6 + 1$, więc S_{2011}

daje przy dzieleniu przez 3 tę samą resztę

co $2 \cdot 335 + 1$, czyli 2. Stąd S_{2011}, S_{2010}

nie są podzielne przez 3, zaś S_{2008} już jest.

Zadanie upraszcza się, jeżeli spojrzymy na nie z innej strony. Otóż zamiast zastanawiać się nad różnymi strategiami, przyjrzyjmy się możliwym kolejnościom przeszukiwania krawędzi.



Jeżeli założymy, że w każdym ruchu pewien policjant przechodzi z pewnego wierzchołka do sąsiedniego, to w naturalny sposób pojawią się pojęcia *krawędzi skażonej* i *krawędzi czystej*, czyli odpowiednio takiej, w której może być terrorysta, i takiej, w której na pewno terrorysty w danym momencie nie ma.

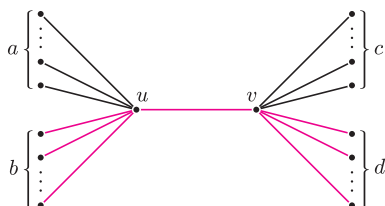
Teraz będzie nam potrzebny jeszcze jeden, nietrywialny fakt.

Fakt 2. *Istnieje optymalna strategia monotoniczna, tzn. taka, w której zbiór krawędzi czystych rośnie (czyli jeśli jakaś krawędź jest czysta w danym momencie, to już do końca przeszukiwania taka będzie).*



Tak więc, zamiast badać, czy dana strategia przeszukuje wszystkie krawędzie, pomyślmy nad dowolną sekwencją oczyszczania krawędzi i obliczmy, ilu potrzeba policjantów, aby ją zrealizować. Jeżeli następnie zbadamy to dla wszystkich możliwych kolejności przeszukiwania krawędzi, to minimum z otrzymanych wyników będzie równe liczbie policyjnej grafu.

Jak dla danej kolejności przeszukiwania krawędzi wyznaczyć liczbę potrzebnych policjantów? Rozważmy zbiory czystych krawędzi w kolejnych momentach. Zauważmy, że do blokowania czystego podzbioru krawędzi potrzeba dokładnie tylu policjantów, ile jest w grafie wierzchołków incydentnych zarówno z krawędzią czystą, jak i z krawędzią skażoną. To jednak nie wystarczy. Musimy jeszcze rozważyć sposób przeszukiwania każdej krawędzi – może się bowiem zdarzyć, że w czasie jej przeszukiwania potrzebnych jest więcej osób niż potrzeba strażników bezpośrednio przed i bezpośrednio po operacji.



Rys. 2. Moment przeszukiwania krawędzi $u-v$; kolorowe linie oznaczają krawędzie skażone.

Rozważmy więc samą operację oczyszczenia pewnej krawędzi $u-v$. Załóżmy, że przed jej oczyszczeniem u jest incydentne z a krawędziami czystymi i b krawędziami skażonymi (nie licząc $u-v$), natomiast v z c czystymi i z d skażonymi (również nie licząc $u-v$). Sytuację przedstawia rysunek 2.

Niech x będzie liczbą policjantów potrzebnych do pilnowania krawędzi tuż przed oczyszczeniem $u-v$, natomiast y – tuż po jej oczyszczeniu. Oczyszczenie krawędzi $u-v$ wymaga $\max(x, y) + 1$ policjantów w sytuacji, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$(a = b = 0 \text{ lub } a > 0, b > 0) \text{ oraz } (c = d = 0 \text{ lub } c > 0, d > 0).$$

We wszystkich innych przypadkach potrzeba dokładnie $\max(x, y)$ policjantów.

Koszt przeszukiwania grafu przy zadanej kolejności krawędzi jest równy maksimum z zapotrzebowań na policjantów we wszystkich momentach.

Otrzymujemy więc algorytm o złożoności $O^*(|E|!)$, czyli działający w czasie $O(|E|!)$ z dokładnością do czynnika wielomianowego (E to zbiór krawędzi grafu).

Możemy jednak tę złożoność zmniejszyć do $O^*(2^{|E|})$, jeżeli posłużymy się programowaniem dynamicznym – możemy obliczać dla każdego podzbioru krawędzi minimalną liczbę policjantów potrzebną do uzyskania danego podzbioru krawędzi czystych. Jeżeli będziemy generowali te wyniki dla coraz większych podzbiórów krawędzi, to dla każdego z nich możemy obliczyć wynik w czasie wielomianowym, korzystając z wyników dla mniejszych zbiorów.

Dokładną specyfikację tego algorytmu pozostawiam jako ćwiczenie dla Czytelnika.



Rozwiązanie zadania F 801.

Warunek równowagi bańki mydlanej to $P_1 = p_1 + 4\sigma/r$, gdzie P_1 jest ciśnieniem wewnątrz bańki. Po zmniejszeniu promienia bańki o połowę ciśnienie wywierane przez zakrzywioną powierzchnię bańki zwiększy się do $8\sigma/r$. Skoro temperatura układu jest stała, to ciśnienie powietrza wewnątrz bańki, odwrotnie proporcjonalnie do jej objętości, wzrośnie 8 razy, $8P_1 = p_2 + 8\sigma/r$. Z otrzymanych dwóch równań wyznaczamy

$$p_2 = 8p_1 + \frac{24\sigma}{r}.$$