Środek ciężkości

Joanna JASZUŃSKA

Środek ciężkości to – intuicyjnie – taki punkt, w którym trzeba coś podeprzeć, by owo coś utrzymało się w równowadze. Można go własnoręcznie poszukać na przykład dla długopisu, balansując nim poziomo na palcu.

1. Czy istnieje wielościan wypukły, w którym żaden rzut środka ciężkości na płaszczyznę zawierającą ścianę nie należy do tej ściany?

Fakt 1. *Dla punktów $X_1, \ldots, X_n$ z masami odpowiednio $m_1, \ldots, m_n > 0$ istnieje dokładnie jeden środek ciężkości $S = S((X_1, m_1), \ldots, (X_n, m_n))$ i jedynie on spełnia warunek $m_1 \cdot \overrightarrow{SX_1} + \ldots + m_n \cdot \overrightarrow{SX_n} = \overrightarrow{0}$. W szczególności $S((X_1, m_1), (X_2, m_2))$ to jedyny taki punkt S na prostej X_1X_2, że $\overrightarrow{X_1S} : \overrightarrow{SX_2} = m_2 : m_1$.*

Fakt 2. *Jeśli część spośród rozważanych punktów zastąpić ich środkiem ciężkości z masą równą sumie ich mas, to środek ciężkości całego układu nie zmieni się.*

Wiadomo, że środek ciężkości „pełnego” trójkąta pokrywa się ze środkiem ciężkości jego wierzchołków (dowód np. w *Delcie* 7/2008). Środek ciężkości obwodu trójkąta może być gdzie indziej.

2. Wykaż, że środkowe trójkąta przecinają się w środku ciężkości jego wierzchołków.

3. Udowodnij, że środkiem ciężkości obwodu trójkąta jest środek okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez środki jego boków.

4. W wierzchołkach trójkąta ostrokątnego ABC umieszczono masy odpowiednio $\operatorname{tg} \sphericalangle A, \operatorname{tg} \sphericalangle B, \operatorname{tg} \sphericalangle C$. Wykaż, że ich środkiem ciężkości jest ortocentrum $\triangle ABC$.

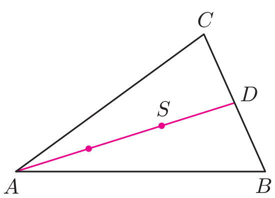
5. Trzy muchy o równych masach i zaniedbywalnych rozmiarach spacerują po obwodzie trójkąta, jedna z nich przeszła cały obwód. Wykaż, że jeśli środek ciężkości much nie zmienia położenia, to pokrywa się ze środkiem ciężkości trójkąta.

Za miesiąc dalsze zastosowania środka ciężkości do zadań pozornie z nim niezwiązanych.

6. Wykaż, że wszystkie osie symetrii wielokąta przecinają się w jednym punkcie.

Rozwiązania

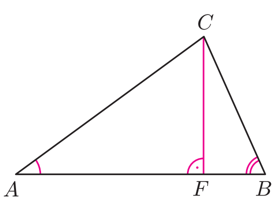
R1. Jeśli rzut środka ciężkości wielościanu wypukłego nie należy do ściany, na której on stoi, to wielościan ten przewraca się. Gdyby istniał opisany w zadaniu wielościan, przewracałby się w nieskończoność. Ale to jest niemożliwe. □



Rys. 1

R2. Umieśćmy w wierzchołkach $\triangle ABC$ równe masy m. Wtedy $S((B, m), (C, m)) = D$, gdzie D to środek BC (rys. 1). Środek ciężkości trójkąta $S = S((A, m), (D, 2m))$ leży na środkowej AD; analogicznie leży na pozostałych środkowych. Ponadto $AS : SD = 2 : 1$, czyli środkowe dzielą się w stosunku $2 : 1$, licząc od wierzchołka. □

Wskazówki 3. Każdy bok zastąpmy punktem w jego środku z masą odpowiadającą jego długości. Jaki trójkąt tworzą te punkty? Jeśli punkt K na boku EF trójkąta DEF spełnia $EK : KF = DE : DF$, to jest spodkiem dwusiecznej $\sphericalangle EDF$.

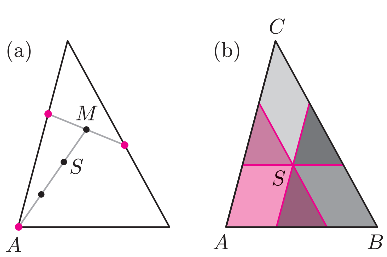


Rys. 2

R4. Jeśli CF jest wysokością $\triangle ABC$, to $\operatorname{tg} \sphericalangle A = CF/AF$ i $\operatorname{tg} \sphericalangle B = CF/BF$ (rys. 2). Stąd $AF/BF = \operatorname{tg} \sphericalangle B / \operatorname{tg} \sphericalangle A$, czyli $F = S((A, \operatorname{tg} \sphericalangle A), (B, \operatorname{tg} \sphericalangle B))$. Szukany środek ciężkości leży więc na CF i analogicznie na wysokościach z A i z B. □

R5. Rozważmy moment, gdy mucha, która przeszła cały obwód, jest w wierzchołku A trójkąta. Środek ciężkości pozostałych dwóch much jest w środku M odcinka pomiędzy nimi (rys. 3(a)). Środek ciężkości S wszystkich much jest na odcinku AM oraz $AS : SM = 2 : 1$, czyli $S = \mathcal{J}_A^{2/3}(M)$. Stąd $S \in \mathcal{J}_A^{2/3}(\triangle ABC)$.

Analogiczne rozumowanie dla wierzchołków B i C prowadzi do wniosku, że jedynym możliwym położeniem S jest środek ciężkości trójkąta (rys. 3(b)). □



Rys. 3 (a) i (b). $\mathcal{J}_A^{2/3}$ oznacza jednokładność o środku A i skali $2/3$.

R6. Każda oś symetrii wielokąta przechodzi przez środek ciężkości S jego wierzchołków, bo obrazem S w symetrii względem takiej osi jest on sam. □

Zadania domowe

7. Udowodnij, że w dowolnym czworościanie odcinki łączące wierzchołki ze środkami ciężkości przeciwległych ścian przecinają się w jednym punkcie.

8. Czy dla dowolnego punktu S wewnątrz trójkąta można w jego wierzchołkach umieścić takie masy, by ich środek ciężkości był w S?

9. Na płaszczyźnie danych jest sześć punktów, z których żadne trzy nie są współliniowe. Środek ciężkości trójkąta utworzonego przez pewne trzy z nich oznaczmy jako S, zaś środek ciężkości trójkąta utworzonego przez pozostałe trzy – jako T. Wykaż, że wszystkie tak wyznaczone proste ST przecinają się w jednym punkcie.