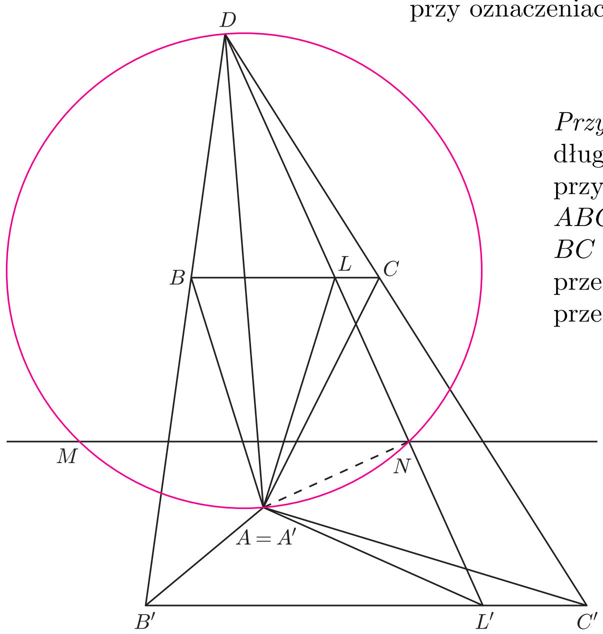
Ponieważ trójkąty ABC i $A'B'C'$ mają równe pola, więc wierzchołki A i A' leżą na prostej k równoległej do l. Sprawdźmy, że dla dowolnej prostej n, równoległej do l, jej przekroje z trójkątami ABC i $A'B'C'$ są równe, czyli $|DE| = |D'E'|$ przy oznaczeniach z rysunku. Istotnie, z twierdzenia Talesa mamy

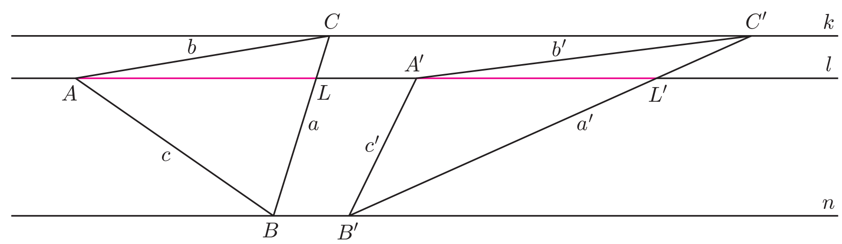


$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{H}{h} = \frac{|A'B'|}{|A'D'|} = \frac{|B'C'|}{|D'E'|}.$$

Przypadek 2. W trójkącie ABC żaden bok nie ma takiej samej długości jak bok trójkąta $A'B'C'$. Bez utraty ogólności rozważań przyjmujemy, że $a = |BC| < |B'C'| = a'$. Umieszczamy trójkąty ABC i $A'B'C'$ tak, że mają one wspólny wierzchołek $A = A'$, boki BC i $B'C'$ są równoległe i punkt A należy do pasa wyznaczonego przez proste zawierające te odcinki. Niech D będzie punktem przecięcia prostych BB' i CC'.

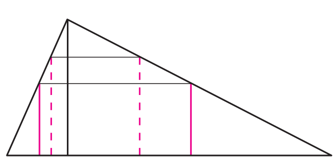
Na odcinku DA, jako na średnicy, wykreślamy okrąg O. Prosta przechodząca przez środki boków BB' i CC' przecina ten okrąg w punktach M i N. Wówczas prosta DN przecina odcinek BC w punkcie L, a odcinek $B'C'$ w punkcie L'. Punkty L i L' dzielą odcinki BC i $B'C'$ w takim samym stosunku, na mocy twierdzenia Talesa. Zatem pole trójkąta ACL stanowi taką samą część pola trójkąta ABC, jaką częścią pola trójkąta $A'B'C'$ jest pole trójkąta $A'C'L'$. Ponieważ pola trójkątów ABC i $A'B'C'$ są równe, więc równe są też pola trójkątów ACL i $A'C'L'$.

Ponadto, ponieważ $|LN| = |NL'|$ i kąt DNA jest prosty, więc $|AL| = |A'L'|$. Umieszczamy teraz trójkąty ABC i $A'B'C'$ tak, by odcinki AL i $A'L'$ leżały na prostej l, a wierzchołki C i C' leżały w tej samej półpłaszczyźnie. Z równości pól trójkątów ACL i $A'C'L'$ wynika, że wierzchołki C i C' leżą na prostej k równoległej do l, a wierzchołki B i B' na prostej n, także równoległej do l.



Dwukrotne odwołanie do przypadku 1 kończy dowód twierdzenia. □

Powiadają, że dwaj najmłodsi uczniowie Galileusza, Bonaventura Cavalieri i Evangelista Torricelli, byli ludźmi do tego stopnia pogodnymi i pełnymi poczucia humoru, że nawet podczas pracy naukowej robili sobie wzajemnie zaawansowane psikusy ku uciesze znajomych. Ich najważniejsze dzieło, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, przedstawiało oryginalną koncepcję powstawania podstawowych figur geometrycznych, nazwanych przez nich kontinuami. Twierdzili mianowicie, że linia to zapis dziejów punktu w jakimś przedziale czasu, powierzchnia to dzieje linii, a bryła to dzieje powierzchni. Przy takim podejściu istotne było podanie reguł, jak przy ruchu punktu powstaje długość, jak przy ruchu linii powstaje pole, a przy ruchu powierzchni – objętość.



Podobno w początkowej redakcji stosownego rozdziału Cavalieri napisał, że miary te są zsumowaniem elementów niższego wymiaru (tych tytułowych *niepodzielnych*): długość linii powstaje ze zsumowania punktów składających się na nią, pole – długości odcinków, a objętość ze zsumowania pól figur płaskich. Przeczytawszy to, Torricelli zaprosił znajomych na obiad, na którym stwierdził: *Mój kolega Bonaventura, oglądając* (załączony) *rysunek, udowodnił, że pole trójkąta prostokątnego z lewej strony jest równe polu trójkąta z prawej – przecież każdemu pionowemu odcinkowi składającemu się na jeden z nich odpowiada dokładnie jeden odcinek składający się na drugi!*

Podobno koledzy śmiali się i bawili przez wiele godzin, a Cavalieri po powrocie do domu sformułował zasadę, nazywaną dziś jego imieniem, już poprawnie.

M. K.