

# Osobliwość trójkątów

Jarosław GÓRNICKI\*

Pole figury  $F$  zawartej między prostymi  $x = a$ ,  $x = b$ , gdzie  $a < b$ , oraz krzywymi  $y_1 = f(x)$ ,  $y_2 = g(x)$ , gdzie  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  dla  $x \in [a, b]$ , można wyrazić wzorem  $|F| = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$ . Jeśli wprowadzimy funkcję  $r(x) = g(x) - f(x)$ , to  $|F| = \int_a^b r(x) dx$ . Ostatnia zależność dowodzi, że kształt figury  $F$  nie ma żadnego znaczenia, ważna jest jedynie długość odcinków  $r(x)$  dla różnych wartości zmiennej  $x$ . Tę obserwację wyraża **zasada Cavalieriego dla figur płaskich**:

*jeżeli dwie figury płaskie w przecięciu z każdą prostą równoległą do danej dają przekrój o tej samej długości, to pola tych figur są równe.*

Przekroje nie muszą nawet być w jednym kawałku – wystarczy, żebyśmy umieli obliczyć sumaryczną długość takiego przekroju. Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe – istnieją figury o równych polach, których nie można ułożyć na płaszczyźnie tak, że przecinane prostymi równoległymi o wskazanym kierunku, w każdym przypadku będą dawać przekroje o równych długościach.

**Twierdzenie 1.** *Nie istnieje trójkąt  $T$  o polu  $\pi r^2$ , taki że przekroje pewnego koła o promieniu  $r$  i trójkąta  $T$  każdą prostą równoległą do danej są odcinkami o równych długościach.*

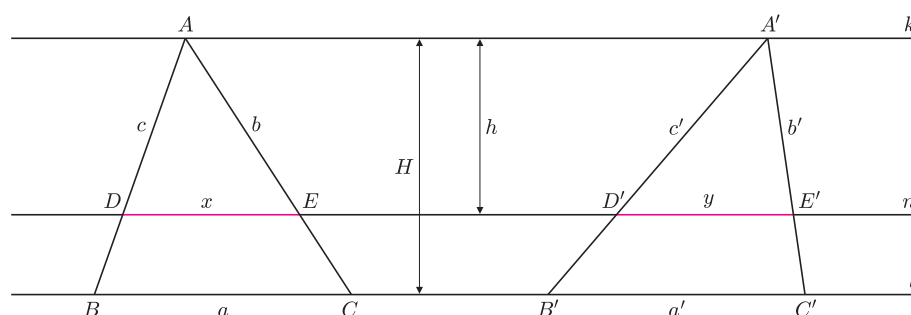
**Dowód.** Gdyby istniało takie położenie koła o promieniu  $r > 0$  i trójkąta  $T$ , w którym każda prosta o ustalonym kierunku przecinałaby te figury na odcinkach równej długości (jeśli w ogóle by je przecinała), to prosta, która przechodziłaby przez środek koła, musiałaby przechodzić przez jeden z wierzchołków trójkąta i jej przecięcie z trójkątem miałyby długość  $2r$ . Trójkąt  $T$  zostałby podzielony na dwa trójkąty, dla których to przecięcie byłoby wspólną podstawą. Ponieważ opuszczone na nią wysokości w sumie miałyby długość  $2r$ , więc pole trójkąta musiałoby być równe  $2r^2 \neq \pi r^2$ . Uzyskana sprzeczność kończy dowód.  $\square$

W przypadku trójkątów o równych polach sytuacja jest całkowicie odmienna, chociaż niełatwo to sobie wyobrazić, gdy patrzymy na dwa trójkąty o równych polach, z których jeden jest „cienki i długi”, a drugi „krótki i pękaty”.

**Twierdzenie 2** (H. Eves, 1991). *Dla trójkątów o równych polach istnieje takie ich położenie na płaszczyźnie, że każda prosta równoległa do danej przecina każdy z trójkątów na odcinku o tej samej długości.*

**Dowód.** Załóżmy, że trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  mają równe pola. Rozpatrzmy dwa przypadki.

**Przypadek 1.** Jeden bok trójkąta  $ABC$  ma taką samą długość jak jeden bok trójkąta  $A'B'C'$ . Możemy przyjąć bez straty ogólności, że  $|BC| = |B'C'|$ . Umieszczamy trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  tak, aby boki  $BC$  oraz  $B'C'$  leżały na prostej  $l$ , zaś wierzchołki  $A$  i  $A'$  leżały w tej samej półpłaszczyźnie.



\*Katedra Matematyki,  
Politechnika Rzeszowska

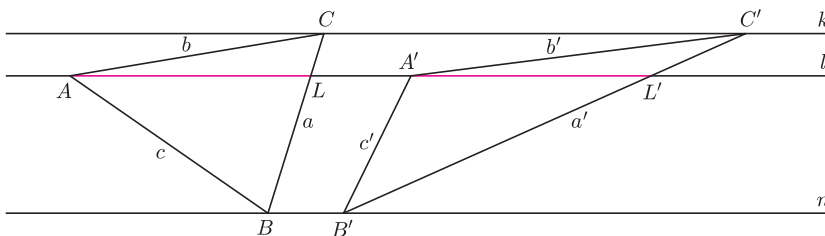
Ponieważ trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  mają równe pola, więc wierzchołki  $A$  i  $A'$  leżą na prostej  $k$  równoległej do  $l$ . Sprawdźmy, że dla dowolnej prostej  $n$ , równoległej do  $l$ , jej przekroje z trójkątami  $ABC$  i  $A'B'C'$  są równe, czyli  $|DE| = |D'E'|$  przy oznaczeniach z rysunku. Istotnie, z twierdzenia Talesa mamy

$$\frac{|BC|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|AE|} = \frac{H}{h} = \frac{|A'B'|}{|A'D'|} = \frac{|B'C'|}{|D'E'|}.$$

*Przypadek 2.* W trójkącie  $ABC$  żaden bok nie ma takiej samej długości jak bok trójkąta  $A'B'C'$ . Bez utraty ogólności rozważań przyjmujemy, że  $a = |BC| < |B'C'| = a'$ . Umieszczamy trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  tak, że mają one wspólny wierzchołek  $A = A'$ , boki  $BC$  i  $B'C'$  są równoległe i punkt  $A$  należy do pasa wyznaczonego przez proste zawierające te odcinki. Niech  $D$  będzie punktem przecięcia prostych  $BB'$  i  $CC'$ .

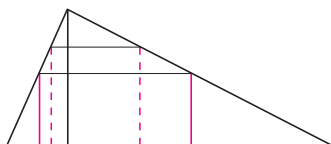
Na odcinku  $DA$ , jako na średnicy, wykreślamy okrąg  $O$ . Prosta przechodząca przez środki boków  $BB'$  i  $CC'$  przecina ten okrąg w punktach  $M$  i  $N$ . Wówczas prosta  $DN$  przecina odcinek  $BC$  w punkcie  $L$ , a odcinek  $B'C'$  w punkcie  $L'$ . Punkty  $L$  i  $L'$  dzielą odcinki  $BC$  i  $B'C'$  w takim samym stosunku, na mocy twierdzenia Talesa. Zatem pole trójkąta  $ACL$  stanowi taką samą część pola trójkąta  $ABC$ , jaką częścią pola trójkąta  $A'B'C'$  jest pole trójkąta  $A'C'L'$ . Ponieważ pola trójkątów  $ABC$  i  $A'B'C'$  są równe, więc równe są też pola trójkątów  $ACL$  i  $A'C'L'$ .

Ponadto, ponieważ  $|LN| = |NL'|$  i kąt  $DNA$  jest prosty, więc  $|AL| = |A'L'|$ . Umieszczamy teraz trójkąty  $ABC$  i  $A'B'C'$  tak, by odcinki  $AL$  i  $A'L'$  leżały na prostej  $l$ , a wierzchołki  $C$  i  $C'$  leżały w tej samej półpłaszczyźnie. Z równości pól trójkątów  $ACL$  i  $A'C'L'$  wynika, że wierzchołki  $C$  i  $C'$  leżą na prostej  $k$  równoległej do  $l$ , a wierzchołki  $B$  i  $B'$  na prostej  $n$ , także równoległej do  $l$ .



Dwukrotne odwołanie do przypadku 1 kończy dowód twierdzenia.  $\square$

**Powiadają, że** dwaj najmłodsi uczniowie Galileusza, Bonaventura Cavalieri i Evangelista Torricelli, byli ludźmi do tego stopnia pogodnymi i pełnymi poczucia humoru, że nawet podczas pracy naukowej robili sobie wzajemnie zaawansowane psikusy ku uciesze znajomych. Ich najważniejsze dzieło, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, przedstawiało oryginalną koncepcję powstawania podstawowych figur geometrycznych, nazwanych przez nich kontinuumami. Twierdzili mianowicie, że linia to zapis dziejów punktu w jakimś przedziale czasu, powierzchnia to dzieje linii, a bryła to dzieje powierzchni. Przy takim podejściu istotne było podanie reguł, jak przy ruchu punktu powstaje długość, jak przy ruchu linii powstaje pole, a przy ruchu powierzchni – objętość.



Podobno w początkowej redakcji stosownego rozdziału Cavalieri napisał, że miary te są zsumowaniem elementów niższego wymiaru (tych tytułowych *niepodzielnych*): długość linii powstaje ze zsumowania punktów składających się na nią, pole – długości odcinków, a objętość ze zsumowania pól figur płaskich. Przeczytawszy to, Torricelli zaprosił znajomych na obiad, na którym stwierdził: *Mój kolega Bonaventura, oglądając (załączony) rysunek, udowodnił, że pole trójkąta prostokątnego z lewej strony jest równe polu trójkąta z prawej – przecież każdemu pionowemu odcinkowi składającemu się na jeden z nich odpowiada dokładnie jeden odcinek składający się na drugi!*

Podobno koledzy śmiali się i bawili przez wiele godzin, a Cavalieri po powrocie do domu sformułował zasadę, nazywaną dziś jego imieniem, już poprawnie.

M. K.