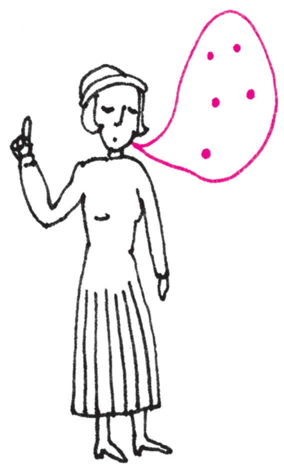
Twierdzenie z happy endem

scenariusz *Zofia MIECHOWICZ**
reżyseria *Tomasz BARTNICKI**



Zdarza się czasem, że zachód słońca i pusta, piaszczysta plaża zachwycają nas, kiedy patrzymy na nie, spacerując brzegiem morza, jednak zamknięte w martwe ramy zdjęcia przywodzą na myśl co najwyżej słowo „kicz”. Ta historia, gdyby jeden z hollyłódzkich reżyserów zdecydował się nakręcić film na jej podstawie, wydałaby się z pewnością banalna. Tymczasem napisało ją życie. Napisało i umieściło w niesamowitym, matematycznym świecie, przez co nabrała szczególnego uroku. Posłuchajcie opowieści o niezwykłej więzi, jaka połączyła dwoje ludzi... A może będzie to opowieść o tym, jak niezwykła więź połączyła dwoje ludzi z matematyką? Przeczytajcie i oceńcie sami.

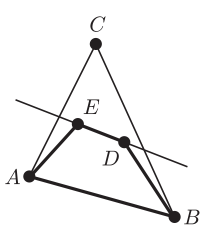
Lata trzydzieste ubiegłego stulecia były, z wielu względów, dla mieszkańców Węgier czasem trudnym. Ale zima w roku 1933 była wyjątkowo piękna. Oprószony śniegiem urokliwy Park Miejski czy pełne czaru kawiarenki w Budapeszcie stanowiły idealne miejsce spotkań. Grupka młodych ludzi (między innymi Paul Erdős, Paul Turán, George Szekeres i Esther Klein) tę zimową scenerię uznała za idealne tło dla długich i inspirujących rozmów o... matematyce. Któregoś mroźnego, niedzielnego popołudnia Esther, która wyjątkową miłością pałała do problemów geometrycznych, podzieliła się z kolegami pewną obserwacją.

Osobom nieobeznanym z językiem węgierskim przypominamy, że u naszych bratanków pisane *sz* wymawia się jak polskie *s* i na odwrót – pisane *s* wymawia się jak polskie *sz*. Zatem węgierskie *szekeres* powinniśmy wymawiać jak polskie *sekeresz*.

Twierdzenie (Esther Klein, 1933). *Wśród dowolnych pięciu punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zawsze znajdziemy cztery punkty, które są wierzchołkami wypukłego czworokąta.*

Zbiór na płaszczyźnie nazywamy *wypukłym*, jeżeli odcinek łączący dwa dowolne punkty tego zbioru w całości się w nim zawiera. Dla wielokąta warunek wypukłości jest równoważny temu, że miara każdego z jego kątów wewnętrznych jest mniejsza niż 180 stopni.

Dowód. Wystarczy przeanalizować trzy rodzaje możliwych konfiguracji pięciu punktów na płaszczyźnie. Jeżeli leżą one w wierzchołkach pięciokąta wypukłego, to dowolne cztery z nich spełniają tezę twierdzenia. Zachodzi ona również, gdy cztery punkty tworzą wypukły czworokąt, a piąty punkt leży w jego wnętrzu lub na zewnątrz. Pozostaje do sprawdzenia „najgorszy” przypadek, gdy trzy punkty (A, B i C) są wierzchołkami trójkąta, wewnątrz którego leżą dwa pozostałe D i E (patrz rysunek 1). Wówczas prosta przechodząca przez wewnętrzne punkty D i E musi przeciąć dokładnie dwa boki trójkąta, gdyż zgodnie z założeniem o niewspółliniowości żaden z wierzchołków nie może na niej leżeć. Ale w takim przypadku wierzchołki A i B, które leżą po jednej stronie prostej, wraz z punktami D i E tworzą wypukły czworokąt $ABDE$. $\square$



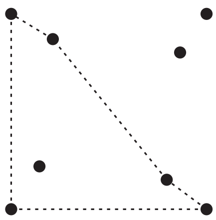
Rys. 1. Wypukły czworokąt

Ta niewinnie wyglądająca obserwacja geometryczna stała się dla Erdősa i Szekeresa inspiracją do dalszych badań nad ciekawymi problemami z pogranicza geometrii i kombinatoryki. Postawili nasuwające się od razu pytanie: czy twierdzenie Esther Klein o czworokącie można uogólnić na dowolne k-kąty wypukłe? Innymi słowy, czy w odpowiednio dużym i „porządnym” zbiorze punktów na płaszczyźnie można zawsze odnaleźć wielokąt wypukły o zadanej liczbie wierzchołków? Wkrótce opublikowali oni wspólną pracę, która stała się motorem szybkiego rozwoju geometrii kombinatorycznej. Ich główne twierdzenie dawało pozytywną odpowiedź na postawione wcześniej pytanie.

Twierdzenie (Erdős, Szekeres, 1935). *Dla każdej liczby naturalnej k istnieje taka liczba naturalna N, że wśród dowolnych N punktów na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej, zawsze znajdziemy k punktów, które są wierzchołkami wypukłego k-kąta.*

W dowodzie autorzy wykorzystali twierdzenie Ramseya (należy ono obecnie do klasyki kombinatoryki) oraz wcześniejszą obserwację Esther Klein. Jasne jest, że jeżeli znajdziemy jakąkolwiek liczbę N, która spełnia tezę powyższego twierdzenia, to każda liczba większa od niej też ją musi spełniać. Naturalny staje się problem wyznaczenia najmniejszej takiej liczby dla zadanego k. Oznaczmy ją (tak jak w oryginalnej pracy) przez $N_0(k)$. Spróbujmy wyznaczyć wartości $N_0(k)$ dla kilku początkowych k. Trywialnie $N_0(3) = 3$.

*Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski



Rys. 2. Osiem punktów bez wypukłego pięciokąta

Twierdzenie Esther Klein, połączone z obserwacją, że nie każdy czworokąt na płaszczyźnie jest wypukły, daje nam $N_0(4) = 5$. Wykazanie, że $N_0(5) = 9$, wymaga nieco więcej zachodu. Rysunek 2 przedstawia układ ośmiu punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej i żadne pięć nie tworzy wypukłego pięciokąta. Dowód, że wśród dziewięciu punktów sytuacja taka nie może zaistnieć, jest znacznie trudniejszy i po raz pierwszy znalazł go Makai (ten dowód nie został nigdzie opublikowany, ale był cytowany przez Erdősa i Szekeresa). Czy znając pierwsze trzy wartości ciągu $N_0(k)$, można dostrzec jakąś prawidłowość?

Erdős i Szekeres zauważyli, że

$$N_0(3) = 2^1 + 1, \quad N_0(4) = 2^2 + 1, \quad N_0(5) = 2^3 + 1$$

i, mimo że nie znali wartości $N_0(k)$ dla żadnego większego k, a oszacowania, które wynikały z dowodu ich twierdzenia, wyglądały na istotnie nadmiarowe, to pokusili się o postawienie bardzo śmiałej hipotezy, mówiącej, że dla dowolnego k

$$N_0(k) = 2^{k-2} + 1.$$

Paul Erdős był mistrzem w stawianiu hipotez. Większość z nich była na tyle celna, że nie dawała się ani łatwo udowodnić, ani łatwo obalić. W późniejszym okresie zaczął on nawet oferować nagrody pieniężne za ich rozstrzygnięcie (w wysokości od 25 do nawet 3000 dolarów). Wiele z nich pozostaje otwartych po dziś dzień, a po śmierci Erdősa nagrody wypłaca jego bliski przyjaciel i współpracownik, Ron Graham.

Dopiero w roku 1961 opublikowali oni pracę, w której pokazali (przez jawną konstrukcję), że $N_0(k) \geqslant 2^{k-2} + 1$. Niestety, wyznaczenie dokładnych wartości $N_0(k)$ okazało się zagadnieniem o wiele bardziej złożonym. Do dnia dzisiejszego pokazano jedynie, że $N_0(6) = 2^4 + 1 = 17$. Dokonali tego Szekeres i Peters wspomagani przez program komputerowy, który pomógł przeanalizować różne położenia 17 punktów na płaszczyźnie i stwierdzić, że w każdym z nich pojawił się wypukły sześciokąt. Wkład ludzki polegał w tym przypadku na znacznym ograniczeniu zbioru konfiguracji, które wymagały analizy komputerowej. Wynik ten ukazał się drukiem dopiero w 2006 roku, a więc rok po śmierci Szekeresa. Wydaje się niemożliwe, aby metoda komputerowa mogła pomóc przy wyznaczaniu $N_0(7)$, $N_0(8)$ i kolejnych wartości. Najlepsze, jak do tej pory, górne oszacowanie na $N_0(k)$ znaleźli w 2005 roku Tóth i Valtr, dowodząc, że

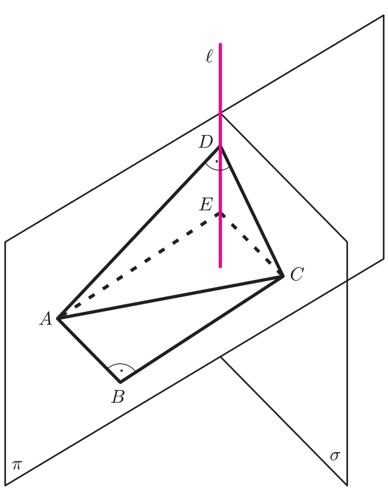
$$N_0(k) \leqslant \binom{2k-5}{k-2} + 1 \sim \frac{4^k}{\sqrt{k}}.$$

Jak widać, jest ono bardzo dalekie od tego, które 70 lat wcześniej przedstawili Erdős i Szekeres.

Po wojnie Esther i George Szekeres osiedlili się w przepięknej, dziewiczej Australii. Ich miłość do siebie i miłość do matematyki przetrwała próbę czasu. Wspólnie dożyli sędziwego wieku (on 94, ona 95 lat), do końca oddając się swym matematycznym pasjom. Zmarli, po prawie siedemdziesięciu latach małżeństwa, tego samego dnia (28 sierpnia 2005 roku) w odstępie zaledwie jednej godziny.

Tutaj historia tego twierdzenia wcale nie musi się skończyć. Być może to właśnie Ty, Czytelniku, będziesz autorem scenariusza do kolejnej części. Ale teraz pewnie zastanawiasz się, gdzie jest obiecywany happy end. Otóż wspomniana na samym początku obserwacja geometryczna Esther Klein nie tylko zainspirowała George'a Szekeresa do zajęcia się problemem w ujęciu matematycznym, ale też skierowała jego uwagę na osobę autorki. Zaledwie w rok po opublikowaniu artykułu Erdősa i Szekeresa odbył się ślub George'a i Esther. Twierdzenie Esther Klein zyskało nazwę twierdzenia z happy endem, a państwo Szekeres żyli długo i szczęśliwie.

THE END



Rozwiązanie zadania M 1329.

I sposób. Załóżmy, że dane punkty nie leżą w jednej płaszczyźnie. Punkty B i D należą do sfery S_1 o średnicy AC. Podobnie, punkty A, C należą do sfery S_2 o średnicy BD. Ale sfera jest jednoznacznie wyznaczona przez cztery niewspółpłaszczyznowe punkty, więc $S_1 = S_2$. Dwie średnice ustalonej sfery leżą w jednej płaszczyźnie, więc w szczególności odcinki AC, BD leżą w jednej płaszczyźnie, co daje tezę.

II sposób. Gdzie leży punkt D? Wobec $\sphericalangle DAB = 90^\circ$ leży on na płaszczyźnie π prostopadłej do AB i przechodzącej przez A. Podobnie wnioskujemy, że punkt D leży na płaszczyźnie σ prostopadłej do prostej BC i przechodzącej przez C. Punkt D leży więc na prostej $\ell = \pi \cap \sigma$, która przechodzi przez punkt E, uzupełniający trójkąt ABC do prostokąta $ABCE$.

Prosta ℓ jest rzutem prostokątnym prostej CD na płaszczyznę π. Ponieważ $CD \perp AD$, to z twierdzenia o trzech prostopadłych $AD \perp \ell$, więc $D = E$. Punkty A, B, C, D leżą więc na jednej płaszczyźnie.