$P = \frac{1}{2}ah$

Joanna JASZUŃSKA

Najpopularniejszy wzór na pole trójkąta to *jedna druga podstawa razy wysokość.* Proste wnioski z tego wzoru pozwalają rozwiązać niełatwe czasem zadania.

Nawias kwadratowy oznacza pole figury.

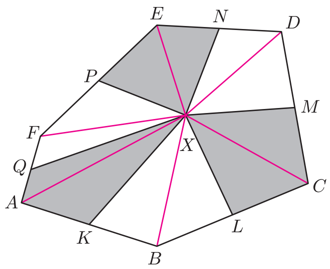
Trójkąty o równych podstawach i wspólnej wysokości mają równe pola

1. Punkt X leży wewnątrz sześciokąta wypukłego $ABCDEF$. Punkty K, L, M, N, P, Q są odpowiednio środkami boków AB, BC, CD, DE, EF, FA. Wykaż, że $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX]$ nie zależy od wyboru punktu X.

2. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$ o polu 1. Punkt K jest symetryczny do punktu B względem punktu A, punkt L jest symetryczny do punktu C względem punktu B, punkt M jest symetryczny do punktu D względem punktu C, punkt N jest symetryczny do punktu A względem punktu D. Oblicz $[KLMN]$.

3. Udowodnij, że środkowe dzielą trójkąt na sześć trójkątów o równych polach.

4. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L należą do boku AB, przy czym $AK = KL = LB$, a punkty M i N należą do boku CD, przy czym $CM = MN = ND$. Wykaż, że $[KLMN] = \frac{1}{3}[ABCD]$.

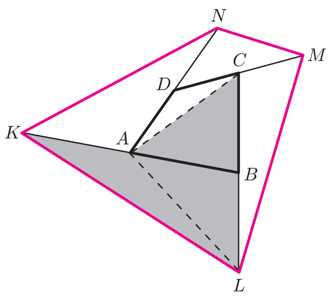


Rys. 1

Trójkąty o wspólnej podstawie i równych polach mają równe wysokości

5. Dany jest taki pięciokąt wypukły $ABCDE$, w którym pola trójkątów ABD, BCE, CDA, DEB i EAC są równe. Udowodnij, że każda przekątna tego pięciokąta jest równoległa do pewnego jego boku.

6. Każda z przekątnych AD, BE, CF sześciokąta wypukłego $ABCDEF$ dzieli go na dwa czworokąty o równych polach. Wykaż, że trójkąty ACE i BDF są podobne.



Rys. 2

Trójkąty o wspólnej podstawie i równych wysokościach mają równe pola

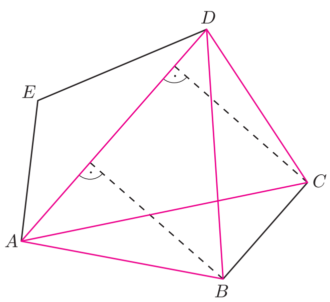
7. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty K i L należą odpowiednio do odcinków AB i AD, przy czym czworokąt $AKCL$ jest równoległobokiem. Odcinki KD i BL przecinają się w punkcie M. Wykaż, że $[AKML] = [BCDM]$.

Trójkąty o wspólnej wysokości mają stosunek pól równy stosunkowi podstaw

8. Przekątne czworokąta wypukłego $ABCD$ przecinają się w punkcie E. Wyznacz $[ABE]$, jeśli $[BCE] = 4$, $[CDE] = 2$, $[DAE] = 3$.

9. Przekątne trapezu $ABCD$ o podstawach AB i CD przecinają się w punkcie E. Dane są $[ABE] = P_1$ i $[CDE] = P_2$. Wyznacz $[ADE]$, $[BCE]$ oraz $[ABCD]$.

Zadania 1 i 5 pochodzą z VI Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, zadanie 2 – z III OMG (www.omg.edu.pl).

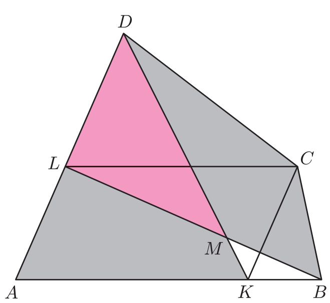


Rys. 3

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Skoro $AK = BK$, to $[AKX] = [BKX]$ (rys. 1). Podobnie $[CLX] = [BLX]$, $[CMX] = [DMX]$, $[ENX] = [DNX]$, $[EPX] = [FPX]$, $[AQX] = [FQX]$. Dodając stronami, uzyskujemy $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX] = [KBLX] + [MDNX] + [PFQX]$, czyli $[QAKX] + [LCMX] + [NEPX] = \frac{1}{2}[ABCDEF]$. □

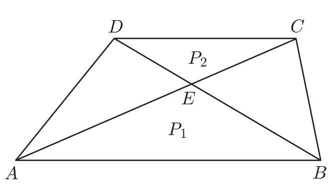
R2. Zauważmy, że $[LAK] = [LAB]$, bo trójkąty te mają równe podstawy $KA = AB$ i wspólną wysokość z L (rys. 2). Ponadto $[LAB] = [CAB]$ (ponieważ $LB = BC$). Analogicznie $[NCM] = [NCD] = [ACD]$. Stąd $[LBK] + [NDM] = 2[ABCD] = 2$. Podobnie $[MCL] + [KAN] = 2$ i ostatecznie $[KLMN] = 5$. □



Rys. 4

R5. Trójkąty ABD i CDA mają wspólną podstawę AD i równe pola, więc też równe wysokości (rys. 3). Punkty B, C są po tej samej stronie prostej AD, stąd $AD \parallel BC$. Dla pozostałych przekątnych dowód jest analogiczny. □

R7. Zachodzą kolejno (rys. 4) równości $[AKML] + [DLM] = [AKD] \overset{(*)}{=} [ACD] = [LCD] + [ACL] \overset{(**)}{=} [LCD] + [BCL] = [BCDL] = [BCDM] + [DLM]$, przy czym $(*)$ wynika z równoległości $KC \parallel AD$, a $(**)$ z $AB \parallel LC$. □



Rys. 5

R9. Trójkąty ABD i ABC mają wspólną podstawę i równe wysokości, więc też równe pola (rys. 5). Stąd $[ADE] + [ABE] = [BCE] + [ABE]$, czyli $[ADE] = [BCE]$.

Trójkąty ADE i CDE mają wspólną wysokość z D, więc $[ADE]/[CDE] = AE/CE$. Podobnie $[ABE]/[BCE] = AE/CE$. Stąd $[ADE]/P_2 = P_1/[ADE]$, czyli $[ADE] = [BCE] = \sqrt{P_1P_2}$. Wobec tego $[ABCD] = P_1 + P_2 + 2\sqrt{P_1P_2} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2$. □

O podobnych zastosowaniach pojęcia objętości brył można przeczytać w *Delcie* 9/2010.