Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 516 ($WT = 3{,}33$) i 517 ($WT = 1{,}98$) z numeru 4/2011

Jerzy Witkowski	Radlin	45,25
Andrzej Idzik	Bolesławiec	41,54
Marian Łupieżowiec	Gliwice	37,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,56
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	33,19
Michał Koźlik	Gliwice	24,36

Wskutek dołączenia p. Witkowskiego liczba Weteranów zaokrągliła się do dziesięciu.

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 524, 525

Redaguje Jerzy B. BROJAN

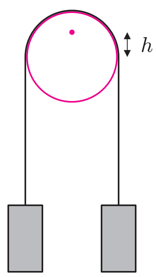
524. Kula o masie $m_1 = 2$ kg, poruszająca się z prędkością początkową $v_1 = 1$ m/s, zderzyła się centralnie i doskonale sprężyście z kulą o masie m_2, początkowo spoczywającą. Druga kula zderzyła się w podobny sposób z trzecią kulą o masie m_3, ta z kolei z czwartą, czwarta z piątą itd. aż do kuli o numerze 2011. Dana jest masa ostatniej kuli $m_{2011} = 1$ kg. Dobrać masy pośrednie tak, aby ostatnia kula uzyskała największą prędkość, przy ustalonych wartościach m_1, v_1 i m_{2011}. Ile wynosi ta największa prędkość? Pominąć efekty związane z obrotem kul.

525. Do naczynia nalano słonej wody, a na wierzch – wody czystej, tak że wysokość słupa wody wynosi $h = 30$ cm, a gęstość zmienia się liniowo z wysokością od $\rho_0 = 1\ \mathrm{g/cm^3}$ przy powierzchni do $\rho_1 = 1{,}1\ \mathrm{g/cm^3}$ przy dnie. W połowie głębokości naczynia pływa w stanie równowagi nurek Kartezjusza – niewielka probówka ze szkła o gęstości $\rho_s = 3\ \mathrm{g/cm^3}$, zawierająca pewną ilość powietrza i otwarta od dołu. Czy ten stan równowagi jest trwały ze względu na małe przesunięcia pionowe nurka? Ciśnienie atmosferyczne wynosi $p_a = 10^5$ Pa.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2011

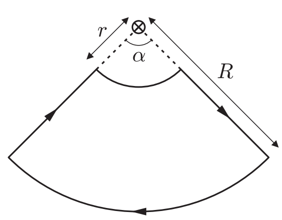
Przypominamy treść zadań:

520. Dwa ciężarki o jednakowych masach są połączone długą nicią przełożoną przez nieważki krążek o promieniu r, który może się swobodnie obracać wokół osi odległej o h od środka krążka (rys. 1). Nić nie ślizga się po krążku. Obliczyć okres małych drgań układu wokół położenia równowagi.



Rys. 1

521. W prostoliniowym przewodniku płynie prąd o natężeniu I_1, a w ramce leżącej w płaszczyźnie prostopadłej do tego przewodnika – prąd o natężeniu I_2. Ramka składa się z dwóch odcinków radialnych o kącie rozwarcia α oraz łuków okręgów odległych od przewodnika prostoliniowego o r i R (rys. 2). Względna przenikalność magnetyczna ośrodka jest równa 1. Znaleźć siłę i moment siły oddziaływania ramki na przewodnik prostoliniowy.



Rys. 2

520. Przechył krążka o kąt ε oznacza podniesienie jego środka o $h(1-\cos\varepsilon) \approx h\varepsilon^2/2$, a zatem podniesienie środka masy ciężarków o tę samą wielkość. Łączna energia potencjalna ciężarków wzrośnie o

$$\Delta E_p = mgh\varepsilon^2,$$

gdzie m jest masą jednego ciężarka. Prędkość ciężarków v wystarczy wyznaczyć w pierwszym rzędzie względem prędkości kątowej krążka ω, ponieważ do energii kinetycznej wchodzi ona w kwadracie. Ze względu na długość nici ruch ciężarków odbywa się wzdłuż osi pionowej i widzimy, że w tym przybliżeniu

$$v = \omega r, \qquad E_k = mv^2 = m\omega^2 r^2.$$

Z warunku $\Delta E_p + E_k = \mathrm{const}$ znajdujemy

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{gh}}.$$

521. Ze względu na uproszczenie rozwiążemy zadanie równoważne: zbadamy oddziaływanie przewodnika prostoliniowego na ramkę. Na łuki okręgów nie działa żadna siła (pole przewodnika jest skierowane stycznie), natomiast na odcinek radialny o długości $\mathrm{d}r$ działa siła

$$\mathrm{d}F = I_2 B(r)\mathrm{d}r = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r},$$

gdzie

$$B(r) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

jest indukcją pola przewodnika prostoliniowego. Na analogiczny odcinek drugiego przewodnika radialnego działa siła równa i przeciwnie skierowana, więc całkowita siła oddziaływania wynosi zero. Odległość wzajemna tych dwóch odcinków jest równa $2r\sin(\alpha/2)$, stąd moment pary sił wynosi

$$\mathrm{d}M = 2r\sin(\alpha/2)\mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\sin(\alpha/2)\mathrm{d}r.$$

Całkowity moment siły jest równy

$$M = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\sin(\alpha/2)(R-r).$$

Klub 44

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 XII 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 615 ($WT = 1{,}65$) i 616 ($WT = 3{,}36$) z numeru 2/2011

Bartłomiej Dyda	Wrocław	42,99
Paweł Najman	Kraków	42,77
Piotr Sobczak	Łódź	38,09
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,98
Paweł Kubit	Kraków	34,44

Zadania z matematyki nr 627, 628

Redaguje Marcin E. KUCZMA

627. W okienka tabeli prostokątnej o rozmiarach $n \times 2$ (n wierszy, 2 kolumny, $n > 2$) wpisujemy liczby od 1 do $2n$, losowo, z jednakowym prawdopodobieństwem każdego rozmieszczenia. Które z następujących zdarzeń jest bardziej prawdopodobne?

(A) W dokładnie jednym wierszu znajdzie się para liczb różniących się o 1.
(B) W żadnym wierszu nie znajdzie się para liczb różniących się o 1.

628. Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ściśle rosnącą, odwzorowującą zbiór wszystkich liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ na cały zbiór $\mathbb{Q}$. Czy stąd wynika, że funkcja f jest przedziałami liniowa (tzn. że $\mathbb{R}$ jest sumą skończenie lub nieskończenie wielu przedziałów dodatniej długości, o rozłącznych wnętrzach, i w każdym z tych przedziałów f jest liniowa)?

Zadanie 628 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2011

Przypominamy treść zadań:

623. Czy można umieścić w polach szachownicy $n \times n$ liczby $1, \ldots, n^2$ tak, by w każdym wierszu suma liczb była całkowitą potęgą dwójki?

624. Niech k będzie liczbą naturalną większą od 1. Dla jakich dodatnich liczb rzeczywistych b można znaleźć funkcję f, ciągłą na przedziale $\langle 0; b)$, różniczkowalną wewnątrz tego przedziału oraz spełniającą warunki: $f(0) = 1$, $f'(x) \geqslant f(x)^k$ dla $x \in \langle 0; b)$?

623. Nie można, jeśli $n > 1$. Przypuśćmy, że to się udało i niech 2^m będzie minimalną sumą liczb w wierszu. Jest ona dzielnikiem sumy liczb w każdym wierszu, więc i sumy liczb we wszystkich wierszach, równej $n^2(n^2+1)/2$. Jasne, że $m > 0$. Zatem liczba $n^2(n^2+1)/2$ musi być parzysta, co oznacza, że n jest liczbą parzystą. Liczba 2^m, względnie pierwsza z czynnikiem (n^2+1), musi dzielić $n^2/2$. To już daje sprzeczność, bowiem $2^m \geqslant 1 + \ldots + n = (n^2+n)/2$.

624. Niech f będzie funkcją, spełniającą podane warunki. Zauważmy, że $f(x) > 0$ w przedziale $\langle 0; b)$ (w przeciwnym razie, oznaczając przez β najmniejsze miejsce zerowe funkcji f, mielibyśmy w przedziale $\langle 0; \beta)$ nierówności $f(x) > 0$, $f'(x) \geqslant f(x)^k > 0$, skąd $f(\beta) \geqslant f(0)$, czyli $0 \geqslant 1$).

Weźmy pod uwagę funkcję $g(x) = -f(x)^{1-k}$ z pochodną
$$g'(x) = (k-1)f(x)^{-k}f'(x) \geqslant k-1.$$
Dostajemy oszacowanie
$$g(x) \geqslant g(0) + (k-1)x = -1 + (k-1)x \quad \text{dla } x \in \langle 0; b).$$
Ale wartości funkcji g w przedziale $\langle 0; b)$ są ujemne. Tak więc $(k-1)x < 1$ dla wszystkich $x \in \langle 0; b)$; to znaczy, że liczba $1/(k-1)$ nie należy do tego przedziału – czyli zachodzi nierówność $b \leqslant 1/(k-1)$.

Na odwrót, jeżeli $b \leqslant 1/(k-1)$, to określamy funkcję f wzorem
$$f(x) = ((1-k)x+1)^{1/(1-k)} \quad \text{dla } x \in \langle 0; b)$$
(suma w nawiasie jest dodatnia w tym przedziale, więc określenie jest poprawne). Ma ona wymagane własności: $f(0) = 1$, $f'(x) = f(x)^k$.

Stąd odpowiedź: liczby b, o które pyta zadanie, są scharakteryzowane nierównością $b \leqslant 1/(k-1)$.

Siatki, grafy, wielościany – odpowiedzi

$\mathfrak{a}$ – {4, 7, 8, 11} – {c, d, h, j}; $\mathfrak{b}$ – {1, 3, 10} – {a, b, k}; $\mathfrak{c}$ – {2, 9} – {e, g}; $\mathfrak{d}$ – 5 – i; $\mathfrak{e}$ – 6 – f.

a – II; b – X; c – I; d – V; e – VII; f – VI; g – IX; h – III; i – VIII; j – XI; k – IV.

α – {III, X, XI} – {A, E, H}; β – {I, II, IX} – {G, I, K}; γ – {VI, VIII} – {C, F}; δ – IV – J; ε – VII – D; φ – V – B.

A – 4; B – 11; C – 5; D – 9; E – 1; F – 6; G – 2; H – 8; I – 7; J – 10; K – 3.